



L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.



Exercice 1. (Étude de fonctions) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser leur domaine de définition, leur dérivée, puis leur tableau de variations en précisant les limites aux bornes des domaines de définition.

1. $f_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$.

2. $f_2(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$.

Exercice 2. (Calculs de limites) Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites dont le terme général est défini par

1. $u_n = \frac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 5}$.

2. $v_n = \frac{5^n + 3^n}{4^n + 2^n}$.

3. $w_n = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \cdot \sqrt{n}$.

Exercice 3. (Résolution d'(in)équations)

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}_1$ des réels x tels que $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$.

2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}_2$ des réels x tels que $\frac{4x^2 + 4x + 2}{5 - 2x} > 0$.

3. Soit a un nombre réel. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}_3$ des réels x tels que $\frac{ax}{ax+3} \leq 4x$.

Exercice 4. (Ensembles images) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer un encadrement (optimal) des $f_i(x)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1. $x \in [0, 2]$ et $f_1(x) = x^2 + 3$.

2. $x \in [0, 4]$ et $f_2(x) = (x - 3)^2$.

3. $x \in [-3, \frac{1}{4}]$ et $f_3(x) = \frac{3 - x^2}{4}$.

Exercice 5. (Nombres complexes)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z :

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0. \quad (1)$$

a) Vérifier que 8 est solution de cette équation.

b) Déterminer les nombres réels α , β et γ tels que

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z - 8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma).$$

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. On considère les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 - 2i\sqrt{3}, b = 2 + 2i\sqrt{3} \text{ et } c = 8.$$

- a) Déterminer le module et un argument de a .
- b) Calculer le nombre complexe $q = \frac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et un de ses arguments φ .
- c) En déduire la nature du triangle ABC .

Exercice 6. (Équation à paramètre) Soit f la fonction définie pour tout x réel de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos x + \sin x$.

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Soit m un réel. Discuter, en fonction des valeurs de m , le nombre de réels x compris entre $-\pi$ et π solutions de l'équation $\cos x + \sin x = m$.

Exercice 7. (Famille de courbes) Pour tout réel k non nul et pour tout réel x , on pose $f_k(x) = x - 2 + ke^{-x}$. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k . Dans tout le problème, k désigne un réel non nul.

1. Montrer qu'il existe une droite Δ d'équation $y = ax + b$ telle que pour tout réel k non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) - ax - b = 0$. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_k$ par rapport à Δ .

2. a) Étudier le sens de variations de f_k et dresser son tableau de variations.

On pourra distinguer $k > 0$ et $k < 0$.

- b) Lorsque $k > 0$, préciser les coordonnées du point A_k de $\mathcal{C}_k$ correspondant au minimum de f_k . Montrer que, lorsque k décrit $\mathbb{R}_+^*$, les points A_k décrivent une droite que l'on précisera.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f'_k(x)$ en fonction de $f_k(x)$.

- b) Soit $\mathcal{D}$ une droite parallèle à Δ , distincte de Δ . Montrer que, soit pour tout $k > 0$ les courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{D}$ ont un unique point d'intersection, soit pour tout $k < 0$ les courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{D}$ ont un unique point d'intersection.

- c) Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}_k$ aux points d'intersection correspondants sont parallèles entre elles.

- d) Déterminer, en fonction de k , le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_k$ avec la droite Δ' d'équation $y = 2$.