■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Résolution d'une équation) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des réels x tels que

$$\sqrt{x^3+3x^2+2x+1} = x+1.$$

Exercice 2. (Résolution d'un système à paramètre) Soit m un réel. On note $(\mathscr{S})$ le système

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y & = m-1 \\ x^2+y^2 & = 4 \end{array}\right. .$$

1. Montrer que le système $(\mathscr{S})$ est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y & = m-1 \\ xy & = \frac{m^2-2m-3}{2} \end{array}\right. .$$

2. Discuter de l'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions de $(\mathscr{S})$ en fonction du paramètre m.

Exercice 3. (Différence symétrique) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. La différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$ est l'ensemble

$$A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

1. Soit C une partie de E. Montrer que $C\Delta A = C\Delta B$ si et seulement si $A = B$.

2. Montrer que $A\Delta B = A$ si et seulement si $B = \emptyset$.

Exercice 4. (Un calcul de somme) Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{4k^2-1}.$$

Exercice 5. (Étude de fonctions) Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie pour tout réel x supérieur à n par

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=-n}^{n} \sqrt{x+k}\right) - (2n+1)\sqrt{x}.$$

1. Montrer que pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction f_n est bien définie sur $[n,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [n,+\infty[$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x+k} + \sqrt{x-k} - 2\sqrt{x}\right).$$

c) Soient ℓ un entier naturel non nul et $x \in [\ell,+\infty[$. Montrer qu'il existe un réel M (à exprimer en fonction de ℓ) tel que

$$\sqrt{x+\ell} + \sqrt{x-\ell} - 2\sqrt{x} = \frac{M}{(\sqrt{x+\ell} + \sqrt{x-\ell} + 2\sqrt{x})(\sqrt{x^2-\ell^2}+x)}.$$

d) En déduire $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{1}{(\sqrt{n+\ell} + \sqrt{n-\ell} + 2\sqrt{n})(\sqrt{n^2-\ell^2}+n)} \geqslant \frac{1}{2(\sqrt{2}+3)n\sqrt{n}}.$$

b) En déduire que $f_n(n) \leqslant \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{2}+3}$.

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} f_n(n)$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que f_n est dérivable sur $]n,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) Soit ℓ un entier naturel non nul. Montrer que pour tout $x \in [\ell,+\infty[$,

$$\frac{1}{2\sqrt{x+\ell}} + \frac{1}{2\sqrt{x-\ell}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

c) En déduire les variations de f_n.

Exercice 6. (Un petit peu de géométrie)

Soit n un entier naturel non nul.

1. Les droites sont des droites du plan euclidien. On note $P_1(n)$ le nombre maximal de régions (bornées ou non) délimitées par n droites. On admet que ce nombre $P_1(n)$ est obtenu en considérant n droites arbitraires telles qu'il n'y en a pas deux parallèles, ni trois concourantes.

a) Déterminer $P_1(1)$, $P_1(2)$ puis $P_1(3)$.

b) Exprimer $P_1(n+1)$ en fonction de $P_1(n)$.

c) En déduire que $P_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, puis exprimer ce résultat sous forme factorisée.

d) Combien y a-t-il au maximum de régions bornées ? non bornées ? On notera respectivement ces nombres $P_1'(n)$ et $P_1''(n)$. Exprimer les résultats sous forme factorisée.

2. Dans l'espace usuel à trois dimensions, on considère n plans arbitraires. On suppose qu'il n'y en a pas deux parallèles ni trois parallèles à une même direction de droites, ni quatre concourants en un même point.

Quel est le nombre $P_2(n)$ de régions de l'espace déterminées par ces n plans ? Combien y en a-t-il qui sont bornées ? qui sont non bornées ? On notera respectivement ces nombres $P_2'(n)$ et $P_2''(n)$. Exprimer ces polynômes en n sous forme factorisée.