■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

**Exercice 1. (Étude de fonction)** On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**1.** Déterminer le domaine de définition de $f$ ainsi que les intervalles sur lesquels elle est continue.

**2.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle $I$ suffit-il de restreindre l'étude de $f$ ? Expliquer comment déduire $\mathscr{C}_f$ à partir de cette étude.

**3.** Étudier le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}$ de $f$ sur l'intervalle $I$ et calculer $f'$.

**4.** Tracer $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi, \pi]$.

**5 . a)** Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} + \arccos\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}} - \frac{\pi}{2}.$$

**b)** Simplifier, en utilisant la trigonométrie, $f(x)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**Exercice 2. (Une équation fonctionnelle)** On cherche l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et pour tout $x$ réel,

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}.$$

**1.** À l'aide d'une fonction usuelle, montrer que $\mathscr{E} \neq \emptyset$.
Soit $f \in \mathscr{E}$.

**2.** Montrer que pour tout réel $x$, $|f(x)| \leqslant 1$.

**3 . a)** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f(x_0) = 1$, alors pour tout entier naturel $n$, $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$.

**b)** En déduire que pour tout réel $x$, $|f(x)| < 1$.

**4 . a)** Montrer que la fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. On note argth sa bijection réciproque.

**b)** Montrer que argth est une fonction dérivable sur $]-1, 1[$ et déterminer sa dérivée.

**5.** Pour tout réel $x$, on pose $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$. Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que pour tout réel $x$,

$$g(2x) = 2g(x).$$

**6.** Conclure.

**Exercice 3. (Une équation différentielle)** Dans tout le problème, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et l'équation différentielle

$$y'' - y = f. \tag{1}$$

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1).

**1.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à l'équation différentielle (1) en fonction des fonctions cosinus et sinus hyperboliques.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\sinh(x-t)\,dt$.

**2.** Montrer que la fonction $g$ est une solution de l'équation différentielle (1).

**3.** En déduire l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$.

On suppose dans toute la suite du problème que la fonction $f$ est une fonction périodique de période $T > 0$.

**4.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $g(x+T) - g(x)$ en fonction de $g(T)$, $g'(T)$, $\sinh x$ et $\cosh x$.

**5.** Montrer qu'il existe une unique solution $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (1) qui soit périodique de période $T$.

**Exercice 4. (Un peu de nombres complexes)** Soient $n$ un entier naturel non nul et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

**1.** Soit $p$ un entier relatif. Calculer la somme

$$W_p = \sum_{k=0}^{n} \omega^{kp}.$$

À tout $n$-uplet de nombres complexes $S^{(0)} = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on associe le $n$-uplet de complexes $T^{(0)} = (t_0, \dots, t_{n-1})$ défini par

$$\forall\, i \in [\![0, n-1]\!],\ t_i = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij} s_j. \tag{2}$$

**2.** Écrire le système d'équations qui relie les composantes de $T^{(0)}$ à celles de $S^{(0)}$. En déduire que

$$s_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} t_i.$$

**3.** Plus généralement, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer le nombre complexe $s_j$ en fonction des nombres complexes $(t_0, \dots, t_{n-1})$.

Pour tout entier naturel $p$, on définit par récurrence une suite de $n$-uplets $S^{(p)} = (s_0^{(p)}, \dots, s_{n-1}^{(p)})$ par

$$\forall\, j \in [\![0, n-1]\!],\ \begin{cases} s_j^{(0)} &= s_j, \\ s_j^{(p+1)} &= \frac{s_j^{(p)} + s_{j+1}^{(p)}}{2}, \end{cases}$$

où, par convention, $s_n^{(p)} = s_0^{(p)}$. À chaque $n$-uplet $S^{(p)}$, on fait correspondre le $n$-uplet $T^{(p)}$ défini comme précédemment dans l'équation (2).

**4.** Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer $t_j^{(1)}$ en fonction de $\omega^j$ et de $t_j$.

**5.** En déduire les composantes du $n$-uplet $T^{(p)}$ en fonction de celles de $T^{(0)}$.

**6 . a)** Montrer que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $|1+\omega^j| < 2$.

**b)** En déduire la limite lorsque $p$ tend vers $+\infty$ de chacune des composantes $t_j^{(p)}$ du $n$-uplet $T^{(p)}$.

**c)** En déduire la limite lorsque $p$ tend vers $+\infty$ de chacune des composantes $s_j^{(p)}$ du $n$-uplet $S^{(p)}$.

**d)** Auriez-vous une interprétation géométrique de ce résultat ?