



L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.



Problème. (Transformée de Fenchel-Legendre)

On définit l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$ et on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

1. $f(0) = 0$,
2. $\forall x \in I, f(x) \geq 0$,
3. f est deux fois dérivable sur I ,
4. $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La partie **III** utilise des résultats des parties **I** et **II**.

Partie I : Comportement à l'infini des fonctions de $\mathcal{N}$

Soit $f \in \mathcal{N}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

1. Dans cette question, on suppose que $f : x \mapsto x - \tanh x$.
 - a) Vérifier que $f \in \mathcal{N}$.
 - b) Déterminer les limites en $+\infty$ et de f' et de g .
 - c) Étudier l'existence d'une droite asymptote à la courbe représentative de f . On précisera la position de la courbe par rapport à l'asymptote éventuelle.
2. Dans cette question, on suppose que $f : x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.
 - a) Vérifier que $f \in \mathcal{N}$.
 - b) Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ de f' et de g .
 - c) Étudier l'existence d'une droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
3. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{N}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Dans la suite de cette partie, $f \in \mathcal{N}$ est quelconque.

4. a) Montrer que pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq x f'(x).$$

- b) En déduire que g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer que pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f(x) + f(y) \leq f(x + y).$$

6. On suppose dans cette question que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

7. On suppose dans cette question que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

- a) Soit $x > 0$. Montrer que

$$\frac{x}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right) \leq f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \leq f(x).$$

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

8. On suppose dans cette question que f n'est pas constante et que g ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

a) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$f(x) \sim_{+\infty} ax.$$

b) Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell$.

c) Montrer que $\ell = a$.

d) Montrer qu'il existe $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$.

e) Dans le cas où $b \in \mathbb{R}$, montrer que la courbe représentative de f possède une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Partie II : L'ensemble $M(f)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On définit, pour tout réel positif m , la fonction $h_m : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto mx - f(x)$ et on note

$$M(f) = \{m \in \mathbb{R}_+ ; h_m \text{ est majorée sur } I\}.$$

9. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer que si $m \in M(f)$, alors $[0, m] \subset M(f)$.

b) En déduire que $M(f)$ est un intervalle.

Désormais, lorsque $m \in M(f)$, on note

$$f^*(m) = \sup_{x \in I} h_m(x) = \sup_{x \in I} (mx - f(x)).$$

La fonction f^* , définie sur $M(f)$, est la fonction conjuguée de f .

10. Soit c un réel et α un réel strictement supérieur à 1. Pour les fonctions qui suivent, préciser $M(f)$ et déterminer, pour les réels x de $M(f)$, $f^*(x)$ en fonction de x .

a) $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c$.

b) $f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

c) $f_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$.

11. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $M(f)$ soit non vide. Montrer que

$$\forall x \in I, \forall m \in M(f), f(x) + f^*(m) \geq mx.$$

12. Soient f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leq g$. Montrer que $M(f) \subset M(g)$, puis que

$$\forall m \in M(f), g^*(m) \leq f^*(m).$$

13. On se propose de chercher les fonctions vérifiant $M(f) = I$ et $f = f^*$. Pour cela, on considère la fonction $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et l'on désigne par f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ telle que $I = M(f)$ et $f^* = f$.

a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq k(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = k(x)$.

c) Conclure.

14. Dans cette question, on considère la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - 1$.

a) Déterminer l'ensemble $M(f)$ et calculer f^* .

b) Déterminer $M(f^*)$ puis $(f^*)^*$.

Partie III : Conjuguée d'une fonction de $\mathcal{N}$

Dans cette partie, les fonctions considérées sont des fonctions de $\mathcal{N}$.

15. On suppose que f est une fonction non nulle de $\mathcal{N}$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\frac{f(x_0)}{x_0} \in M(f)$.

b) En déduire que $M(f)$ est un intervalle non réduit à $\{0\}$.

16. On considère, dans cette question, une fonction f de $\mathcal{N}$ vérifiant $I = M(f)$.

a) Montrer que $M(f^*) = I$ et

$$\forall x \in I, (f^*)^*(x) \leq f(x).$$

b) Soit $x_0 \in I$. Montrer que

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

c) En déduire que

$$\forall x \in I, (f^*)^*(x) \geq f(x).$$

d) Conclure.

17. Dans cette question, f désigne une fonction de $\mathcal{N}$. On suppose en outre que $f'(0) = 0$ et qu'il existe un réel strictement positif c vérifiant

$$\forall x \in I, f''(x) \geq c.$$

a) Montrer que

$$\forall x \in I, f'(x) \geq cx$$

et en déduire que f' réalise une bijection de I dans I .

b) Montrer que $M(f) = I$ et que

$$\forall x \in I, f^*(f'(x)) = xf'(x) - f(x).$$

c) Montrer que f^* est dérivable et donner le lien entre $(f^*)'$ et f' .

18. En utilisant les résultats de la première partie, déterminer $M(f)$ lorsque f appartient à $\mathcal{N}$.