■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Ballons & Paniers) Dans cet exercice, n et b désignent deux entiers naturels non nuls. On s'intéresse aux différences façons de placer b ballons dans p paniers distincts numérotés de 1 à p.

1. On suppose que les b ballons sont numérotés de 1 à b (i.e. les ballons sont distinguables) mais que leur ordre à l'intérieur de chaque panier n'importe pas. Combien y-a-t-il de façons de placer les ballons dans les paniers ?

2. On suppose toujours que les ballons sont numérotés, et cette fois que les ballons de chaque panier sont ordonnés. Montrer que le nombre de façons de placer les ballons dans les paniers est $\frac{(p+b-1)!}{(p-1)!}$.

3. On suppose maintenant que les ballons sont identiques (ils ne sont plus numérotés). Leur ordre dans chacun des paniers est donc sans importance. Combien y-a-t-il de façons de placer les ballons dans les paniers ?

4. On suppose toujours que les ballons sont identiques et qu'aucun panier ne contient plus d'un ballon. Combien y-a-t-il de façons de placer les ballons dans les paniers ?

5. On suppose que les ballons sont identiques et qu'aucun des paniers ne peut être laissé vide. Combien y-a-t-il de façons de placer les ballons dans les paniers ?

Problème. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $u_k \ :\ x \mapsto u_k(x)$ une fonction. Pour x fixé, si la série $\sum u_k(x)$ converge, on note, pour tout entier naturel n, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ son reste d'ordre n. On se propose d'étudier, pour différentes fonctions u_k, la série $\sum R_n(x)$.

Partie I : Série des restes & Intégrales

On suppose dans cette partie que pour tout entier naturel k, $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (-1)^k x^k$.

1. Calcul de $\sum R_n(x)$.

a) Déterminer l'ensemble I des réels x tels que la série $\sum (-1)^k x^k$ converge et préciser, pour tout $x \in I$, sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$.

b) Soit $x \in I$. Montrer que $R_n(x) = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$, puis montrer que la série $\sum R_n(x)$ converge et calculer sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x)$.

2. On conserve les notations de la question précédente et on pose $R_{-1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$. On considère par ailleurs la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On se propose d'établir la convergence de la série $\sum r_n$ et de calculer sa somme.

a) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, puis l'existence, pour tout entier naturel n, du réel r_n.

Dans la suite, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ est tel que $n < m$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx = \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k+1} + \int_0^1 \frac{(-x)^{m+1}}{1+x}dx$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 R_{n-1}(x)\,dx = r_n$.

d) Calculer r_0.

e) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\int_0^1 R_{n-1}(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx - \int_0^1 \frac{(-x)^{m+1}}{(1+x)^2}\,dx$.

f) En déduire que la série $\sum r_n$ converge et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$.

Partie II : Une égalité sur les restes ; quelques applications.

On admettra la règle d'Alembert : Soit (v_k) est une suite à valeurs strictement positives telle que $\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)$ qui converge vers λ. Si $\lambda > 1$, alors $\sum v_k$ diverge. Si $\lambda < 1$, alors $\sum v_k$ converge.

3. Égalité sur les restes. Lorsque la série numérique $\sum u_k$ converge, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n. On suppose que la série $\sum u_k$ converge. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k u_k = (n+1)R_n.$$

4. Application à une suite. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)\frac{(-1)^k}{k} = \alpha n + \beta + o_{+\infty}(1).$$

5. Application à une série à termes positifs. On suppose de plus que pour tout entier naturel k non nul, $u_k \geqslant 0$.

a) Montrer que la convergence de la série $\sum R_k$ entraîne la convergence de la série $\sum k u_k$.

b) On suppose que la série $\sum k u_k$ est convergente. Quelle est la limite de la suite $((n+1)R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

c) En déduire que les deux séries $\sum R_k$ et $\sum k u_k$ sont de même nature et, lorsqu'elle convergent, comparer leurs sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$.

6. Application à la série $\sum \frac{1}{k^x}$. Dans cette question, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x, on note $u_k(x) = \frac{1}{k^x}$. On note toujours $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ le reste d'ordre n et on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

a) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que $\zeta(x)$ est bien défini.

b) Préciser l'ensemble D_1 des réels x pour lesquels la série $\sum R_n(x)$ est convergente et exprimer, pour x dans D_1, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$.

7. Application à une série entière. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de réels. Pour tout réel x, on pose $u_k(x) = a_k x^k$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la série $\sum a_k \alpha^k$ converge absolument. Soit $x \in]-\alpha, \alpha[$.

a) Montrer que que la série $\sum a_k x^k$ converge absolument.

b) Montrer que

$$k a_k x^k = o_{+\infty}\left(k\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^k\right).$$

c) En déduire que la série $\sum k a_k x^k$ converge absolument.

d) En déduire que la suite $((n+1)R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que l'on précisera.

e) En conclure que la série $\sum R_n(x)$ est convergente.

8. Exemple. On suppose que, pour tout entier naturel k non nul, $a_k = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Déterminer $\rho = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \sum a_k \alpha^k \text{ converge absolument}\}$.

b) Pour tout réel x appartenant à $]-\rho, \rho[$, justifier que $\sum a_k x^k$ est une série convergente, puis calculer sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k$.