■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Notations

Soient $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.
Si n et p sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et p colonnes.
Lorsque $p = n$, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.
$\mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ appartenant à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\ker A$ est le noyau de A défini par : $\ker(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ ; \ AX = 0\}$ et $\operatorname{Im} A$ est l'image de A définie par : $\operatorname{Im} A = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ ; \ \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\, Y = AX\}$.
$\mathbb{R}$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$ et on identifiera selon l'usage $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.
Une matrice S de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0,$$

et définie positive si :

$$\forall\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\},\ {}^tXSX > 0.$$

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre n et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre n.
On admettra les résultats suivants. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Le réel λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Le vecteur X est alors un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
- La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice P à coefficients réels inversible et une matrice diagonale D à coefficients réels telle que $A = PDP^{-1}$. Les éléments diagonaux de D sont alors les valeurs propres de A.
- Si A est une matrice symétrique réelle, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la matrice de changement de base P est une matrice orthogonale.

Partie I : Des résultats utiles pour la suite

1. Soit M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\ker M$ et $\ker {}^tM$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les noyaux $\ker M$ et $\ker {}^tM$?

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Im} {}^tM$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les images $\operatorname{Im} M$ et $\operatorname{Im} {}^tM$?

2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\ker \left({}^tAA\right) = \ker A$ et $\ker \left(A{}^tA\right) = \ker({}^tA)$.

b) Montrer que $\operatorname{Rg} \left({}^tAA\right) = \operatorname{Rg} \left(A{}^tA\right) = \operatorname{Rg}(A)$.

c) Montrer que $\operatorname{Im} \left({}^tAA\right) = \operatorname{Im}({}^tA)$ et $\operatorname{Im} \left(A{}^tA\right) = \operatorname{Im}(A)$.

Partie II : Déterminant de Gram & Inégalité d'Hadamard

Soient q un entier naturel non nul et $\mathscr{S} = (x_1, x_2, \cdots, x_q)$ une famille de q vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On note F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{S}$, $r = \dim F$ et $G = (g_{i,j})$ la matrice de $\mathscr{M}_q(\mathbb{R})$ définie par $g_{i,j} = \langle x_i, x_j\rangle$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_q^2$.
Le déterminant de G est appelé déterminant de **Gram** de la famille $\mathscr{S}$ et sera noté $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q)$.
Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ une base orthonormée de F. On note pour tout j de $\mathbb{N}_q$, $x_j = \sum\limits_{i=1}^{r} b_{i,j} e_i$ et B la matrice de $\mathscr{M}_{r,q}(\mathbb{R})$ de terme général $b_{i,j}$.

3 . a) Montrer que $G = {}^tBB$ et en déduire $\operatorname{Rg} G = \operatorname{Rg} \mathscr{S}$.

b) Montrer que G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.

c) En déduire que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \geqslant 0$ et que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ est liée.

d) Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec sa condition nécessaire et suffisante d'égalité est un cas particulier de ce résultat.

4. Montrer que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ reste invariant si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres.

5. Dans cette question q est supérieur ou égal à 2. On note L le sous-espace vectoriel engendré par $(x_2, x_3, \cdots, x_q)$ et $p_L(x_1)$ la projection orthogonale de x_1 sur L, puis on pose $h_1 = x_1 - p_L(x_1)$.

a) Montrer que :

$$\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) = \|h_1\|^2 \gamma(x_2, \cdots, x_q).$$

b) En déduire que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \leqslant \gamma(x_1)\gamma(x_2, x_3, \cdots, x_q)$ avec égalité si et seulement si x_1 est orthogonal à L ou $(x_2, \ldots, x_q)$ est liée.

c) Enfin, montrer que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \leqslant \gamma(x_1)\gamma(x_2)\cdots\gamma(x_q)$ avec égalité si et seulement si les vecteurs x_1, x_2,…, x_q sont deux à deux orthogonaux ou un des x_i est nul.

6. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$ et c_1, c_2,…, c_n ses vecteurs colonnes.

a) Montrer l'inégalité d'Hadamard :

$$|\det A| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|c_k\|,$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs c_1, …, c_n sont deux à deux orthogonaux.

b) On suppose de plus : $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$. Montrer que :

$$|\det A| \leqslant n^{\frac{n}{2}}.$$

avec égalité si et seulement si A est une matrice à coefficients dans $\{-1, +1\}$ et dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

Partie III : Optimisation du déterminant : Échiquiers anallagmatiques de Sylvester

On étudie dans cette partie l'ensemble des matrices pour lesquelles la borne obtenue sur le déterminant est atteinte. On note :

- $\mathscr{H}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{-1, +1\}$ dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.
- $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients diagonaux dans $\{-1, +1\}$.
- E l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels $\mathscr{H}_n$ est non vide.

7. Déterminer explicitement toutes les matrices éléments de $\mathscr{H}_2$.

8 . a) Montrer que toute matrice A de $\mathscr{H}_n$ vérifie ${}^tAA = nI_n$.

b) Réciproquement, toute matrice carrée A vérifiant ${}^tAA = nI_n$ est-elle dans $\mathscr{H}_n$?

c) Montrer que si A est à coefficients dans $\{-1, +1\}$ et vérifie ${}^tAA = nI_n$, alors A est dans $\mathscr{H}_n$.

9. On rappelle qu'une permutation σ de $\mathbb{N}_n$ est une bijection de $\mathbb{N}_n$ sur lui-même. La matrice de permutation P_σ associée à la permutation σ est la matrice d'éléments $[P_\sigma]_{i,j}$ donnés par :

$$\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}_n^2,\ [P_\sigma]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)},$$

où $\delta_{k,l}$ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$

Soient σ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

10 . a) Donner le terme général de la matrice ${}^tP_\sigma A$. Comment obtient-on cette matrice ${}^tP_\sigma A$ à partir de A ?

b) Donner le terme général de la matrice AP_σ. Comment obtient-on cette matrice AP_σ à partir de A ?

c) Montrer que si A appartient à $\mathscr{H}_n$, il en est de même de ${}^tA$, des matrices ${}^tP_\sigma A$ et AP_σ pour toute permutation σ ainsi que des matrices $A\Delta$ et ΔA pour toute matrice Δ de $\mathscr{D}_n$.

11. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit direct (ou produit de Kronecker) de A et B par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

12 . a) Montrer que si $A \in \mathscr{H}_2$ et $B \in \mathscr{H}_n$, alors $A \otimes B \in \mathscr{H}_{2n}$.

b) En déduire que E contient toutes les puissances de 2 différentes de 1.

c) Montrer que l'ensemble $\{A \otimes B\ ;\ (A, B) \in \mathscr{H}_2 \times \mathscr{H}_2\}$ est strictement inclus dans $\mathscr{H}_4$.

13. Soit $n \in E$, $n > 2$.

a) Montrer qu'il existe un élément de $\mathscr{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1. Déduire alors de l'orthogonalité des vecteurs colonnes 1 et 2 d'une telle matrice que n est pair.

On pose $n = 2m$.

b) Montrer qu'il existe un élément de $\mathscr{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1 et dont la deuxième colonne est constituée de m coefficients égaux à 1 suivis de m coefficients égaux à -1. Déduire alors de l'orthogonalité du troisième vecteur colonne avec les vecteurs colonnes 1 et 2 que n est un multiple de 4.

La conjecture d'Hadamard : « tout multiple de 4 est dans E » reste à ce jour une conjecture.

Partie IV : Optimisation d'une fonction sur $\mathscr{H}_n$

14. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

15. Soit $M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de R orthogonale et S symétrique définie positive telle que $M = RS$.

a) Montrer que la matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive.

b) En déduire qu'il existe $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tMM = S^2$.

c) Montrer que S est inversible et que MS^{-1} est orthogonale.

d) Conclure.

Dans toute la suite du problème on admettra l'unicité d'une telle factorisation.

16. Soient $\Sigma \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes, D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\operatorname{Tr}\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que $\operatorname{Tr}(Q\Sigma) = \operatorname{Tr}(Q_1 D)$ et en déduire :

$$\operatorname{Tr}(Q\Sigma) \leqslant \operatorname{Tr}(\Sigma).$$

c) Montrer que $\sup\limits_{Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})} \{\operatorname{Tr}(Q\Sigma)\} = \operatorname{Tr}(\Sigma)$.

17. Soit $n \in E$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{H}_n$, on pose :

$$f(A) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}.$$

Soit $A \in \mathscr{H}_n$. Soit $T = (t_{i,j})$ la matrice triangulaire inférieure d'ordre n définie par $t_{i,j} = 1$ si $i \geqslant j$ et $t_{i,j} = 0$ si $i < j$. D'après la question **15.**, il existe R orthogonale et S symétrique définie positive telle que $T = RS$.

a) Montrer que l'application f ainsi définie de $\mathscr{H}_n$ dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure que l'on notera α_n.

b) Montrer que $f(A) = \operatorname{Tr}(AT)$.

c) Montrer alors que

$$f(A) \leqslant \sqrt{n}\operatorname{Tr}(S) \text{ puis } \alpha_n \leqslant \sqrt{n}\operatorname{Tr}(S).$$

d) Lorsque $n = 2$, évaluer α_2 et $\sqrt{2}\operatorname{Tr}(S)$.

On pourra constater que $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.