■ ■ ■

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie pour tout réel x supérieur à n par

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=-n}^{n} \sqrt{x+k} \right) - (2n+1)\sqrt{x}.$$

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction f_n est bien définie sur $[n, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [n, +\infty[$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{x+k} + \sqrt{x-k} - 2\sqrt{x} \right).$$

c) Soient ℓ un entier naturel non nul et $x \in [\ell, +\infty[$. Montrer qu'il existe un réel M (à exprimer en fonction de ℓ) tel que

$$\sqrt{x+\ell} + \sqrt{x-\ell} - 2\sqrt{x} = \frac{M}{(\sqrt{x+\ell} + \sqrt{x-\ell} + 2\sqrt{x})(\sqrt{x^2-\ell^2} + x)}.$$

d) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{(\sqrt{n+\ell} + \sqrt{n-\ell} + 2\sqrt{n})(\sqrt{n^2-\ell^2} + n)} \geqslant \frac{1}{2(\sqrt{2}+3)n\sqrt{n}}.$$

b) En déduire que $f_n(n) \leqslant \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{2}+3}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(n)$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

b) Soit ℓ un entier naturel non nul. Montrer que pour tout $x \in]\ell, +\infty[$,

$$\frac{1}{2\sqrt{x+\ell}} + \frac{1}{2\sqrt{x-\ell}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

c) En déduire les variations de f_n.