Devoir à la Maison

Fonctions trigonométriques
à rendre le 05 octobre 2015

■ ■ ■

Exercice 1. (Étude de fonction) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f ainsi que les intervalles sur lesquels elle est continue.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I suffit-il de restreindre l'étude de f ? Expliquer comment déduire $\mathscr{C}_f$ à partir de cette étude.

3. Étudier le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}$ de f sur l'intervalle I et calculer f'.

4. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi, \pi]$.

5 . a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} + \arccos\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}} - \frac{\pi}{2}.$$

b) Simplifier, en utilisant la trigonométrie, $f(x)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2. (Une équation fonctionnelle) On cherche l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et pour tout x réel,

$$f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}.$$

1. À l'aide d'une fonction usuelle, montrer que $\mathscr{E} \neq \emptyset$.
Soit $f \in \mathscr{E}$.

2. Montrer que pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 1$.

3 . a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f(x_0) = 1$, alors pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$.

b) En déduire que pour tout réel x, $|f(x)| < 1$.

4 . a) Montrer que la fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. On note argth sa bijection réciproque.

b) Montrer que argth est une fonction dérivable sur $]-1, 1[$ et déterminer sa dérivée.

5. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que pour tout réel x,

$$g(2x) = 2g(x).$$

6. Conclure.