Devoir à la Maison

Construction des fonctions puissance
à rendre le 09 novembre 2015

■ ■ ■

On rappelle que si x est un réel et n un entier naturel, alors x^n est défini par récurrence comme $x^0 = 1$, $x^n = x \cdot x^{n-1}$. L'objectif de ce problème est d'utiliser cette définition pour construire x^α pour tout réel α.
Attention : dans vos démonstrations, vous devrez ne jamais faire référence aux fonctions logarithme et exponentielle ; seul l'usage des puissances entières est autorisé.
Dans tout cet exercice, x désigne un réel strictement positif et n désigne un entier non nul.

Partie I : Racines n-èmes

De la question **1.** à la question **6.**, x et n sont **fixés**.

1. Montrer que s'il existe un réel $y > 0$ tel que $y^n = x$, alors ce réel est unique.

2. Étude de l'ensemble $\mathscr{E} = \{t \in \mathbb{R}\ ;\ t^n < x\}$.

a) Montrer que $\dfrac{x}{1+x} \in \mathscr{E}$.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathscr{E}$, $t < 1 + x$.

c) En déduire que $\mathscr{E}$ possède une borne supérieure que nous noterons y.

Nous allons maintenant démontrer que $y^n = x$.

3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Pour tout entier k, montrer l'inégalité $b^k - a^k \leqslant (b-a)kb^{k-1}$.

4. Nous allons montrer dans cette question que $y^n \geqslant x$. Supposons par l'absurde que $y^n < x$.

a) Soit h un réel strictement positif tel que $h < \inf\left\{1, \dfrac{x - y^n}{n(1+y)^{n-1}}\right\}$. Montrer que

$$(y+h)^n - y^n < x - y^n.$$

b) En déduire que $y + h \in \mathscr{E}$.

c) Conclure.

5. Nous allons montrer dans cette question que $y^n \leqslant x$. Supposons par l'absurde que $y^n > x$. En notant $k = \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$, montrer que $y - k$ est un majorant de $\mathscr{E}$. Conclure.

6. Déduire des questions précédentes que $y^n = x$.

Dans toute la suite, pour tout réel strictement positif x et pour tout entier naturel n non nul, on note $x^{1/n}$ l'unique réel strictement positif tel que $(x^{1/n})^n = x$.

7. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier positif. Montrer en utilisant les définitions précédentes que

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Partie II : Puissances rationnelles

8. Soit $b > 1$. Dans cette question, nous allons construire la puissance r-ème de b, où r est un rationnel strictement positif.

a) Soit $r \in \mathbb{Q}_+^\star$. On suppose qu'il existe p, $s \in \mathbb{N}$ et q, $t \in \mathbb{N}^\star$ tels que $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{s}{t}$. Montrer que $(b^p)^{1/q} = (b^s)^{1/t}$. On notera ainsi $b^r = (b^p)^{1/q}$.

b) Montrer que pour tous nombres rationnels strictement positifs r et s, $b^{r+s} = b^r b^s$.

c) Soient r, $s \in \mathbb{Q}_+^\star$ tels que $r \leqslant s$. Montrer que $b^r \leqslant b^s$.

Partie III : Puissances réelles

9. Soit $b > 1$. Dans cette question, nous allons construire, pour tout réel y strictement positif, la puissance y-ème de b. À tout réel strictement positif y, on associe l'ensemble

$$B(y) = \{b^s \ ; \ s \in \mathbb{Q}_+, s \leqslant y\}.$$

a) Soit $r \in \mathbb{Q}_+^\star$. Montrer que $B(r)$ admet une borne supérieure, puis que $\sup B(r) = b^r$.

b) Pour tout nombre réel strictement positif y, montrer que l'ensemble $B(y)$ admet une borne supérieure. On note $b^y = \sup B(y)$.

c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que $b^{x+y} = b^x b^y$.