



Pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$ , on définit le symbole de Kronecker par  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{i,j} = 0$  sinon. Dans tout cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $(a_0, \dots, a_n)$  une famille de nombres réels distincts appartenant à l'intervalle  $[-1, 1]$  tels que  $a_0 < \dots < a_n$ .

**1.** Une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**a)** Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ .

**b)** Montrer que la famille  $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**2.** Soit  $\pi$  l'application définie pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  par  $\pi(P) = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$ .

**a)** Montrer que  $\pi$  est un projecteur de  $\mathbb{R}[X]$ .

**b)** Déterminer le noyau et l'image de  $\pi$ .

**3.** Soit  $\varepsilon : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $P \mapsto (P(a_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

**a)** Montrer que  $\varepsilon$  est un isomorphisme.

**b)** Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(a_i) = f(a_i)$ .

Ce polynôme s'appelle le *polynôme d'interpolation de Lagrange* associé à la fonction  $f$  aux points  $(a_0, \dots, a_n)$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$ , on note  $\|f\|_\infty = \sup_{[-1, 1]} |f|$ .

**4.** Soient  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([-1, 1], \mathbb{R})$  et  $P_f$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à  $f$ . Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \exists \xi \in ]-1, 1[ ; f(x) - P_f(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{\prod_{i=0}^n (x - a_i)}{(n+1)!}.$$

On pourra considérer la fonction  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(t) - P_f(t) - K \prod_{i=0}^n (t - a_i)$ .

**5.** Soit  $T_{n+1}$  le polynôme de Tchebychev d'ordre  $n + 1$ , i.e. tel que  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $T_{n+1}(x) = \cos((n + 1) \arccos x)$ .

**a)** Montrer que  $T_{n+1}$  est un polynôme scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** On note  $t_{n+1} = 2^{-n}T_{n+1}$ . Montrer que  $t_{n+1}$  est un polynôme unitaire.

**c)** Montrer que, pour tout polynôme  $Q$  unitaire de degré  $n + 1$ ,  $\|Q\|_\infty \geq 2^{-n}$  avec égalité si et seulement si  $Q = t_{n+1}$ .

**6.** Quel est l'intérêt des racines des polynômes de Tchebychev dans l'interpolation de Lagrange ?