Devoir à la Maison

Théorème de d'Alembert-Gauss
à rendre le 07 mars 2016

■ ■ ■

On propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $p > 0$. Notons $\mathscr{P} = \{|P(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ admet une borne inférieure notée α.

2. Soit $r > 0$. Montrer que pour tout nombre complexe z de module r,

$$|P(z)| \geqslant |a_p| r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k| r^k.$$

3. En déduire que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$.

4. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(z_n)| = |P(z_0)| = \alpha$.

5. On suppose que $\alpha \neq 0$ et on pose $Q = \frac{P(X+z_0)}{P(z_0)}$.

a) Montrer que $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$.

b) Montrer qu'il existe $q \in [\![1, p]\!]$ et $b_q \neq 0$ tels que $Q = \sum\limits_{k=q+1}^{p} b_k X^k - b_q X^q + 1$.

c) On note (sous forme trigonométrique) $b_q = \rho e^{-i\theta}$ et $z = re^{i\theta/q}$. Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leqslant r_0$,

$$|Q(z)| - 1 \leqslant -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{p} |b_k| r^k.$$

d) En déduire que $\alpha = 0$.

6. Conclure.