à rendre le 07 mars 2016

■ ■ ■

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 2$. Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, le *commutant* de f est l'ensemble

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \ ; \ g \circ f = f \circ g\}.$$

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que $(\mathscr{C}(f), +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

b) Montrer que $(\mathscr{C}(f), +, \circ)$ est un anneau.

c) Montrer que pour tout $(g, \lambda) \in \mathscr{C}(f) \times \mathbb{C}$,

$$g\left(\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})\right) \subset \mathrm{Ker}\left(f - \lambda\,\mathrm{Id}\right).$$

d) Donner un contre-exemple à la réciproque de la question précédente.

2. Déterminer le commutant d'une homothétie.

3. Soit s une symétrie.

a) Montrer que $g \in \mathscr{C}(s)$ si et seulement si

$$g(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})) \subset \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \text{ et } g(\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})) \subset \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}).$$

b) En déduire $\dim \mathscr{C}(s)$ en fonction de $\dim \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et de $\dim \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

4. Soient F un sous-espace vectoriel de E et s une symétrie. Montrer que F est stable par s si et seulement si $F = (F \cap \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})) \oplus (F \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}))$.

5. Soient s et s' deux symétries qui commutent.

a) Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 et F_4 de E tels que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) &= F_1 \oplus F_2,\\
\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) &= F_3 \oplus F_4,\\
\mathrm{Ker}(s' - \mathrm{Id}) &= F_1 \oplus F_3,\\
\mathrm{Ker}(s' + \mathrm{Id}) &= F_2 \oplus F_4.
\end{aligned}$$

b) Montrer que $g \in \mathscr{C}(s) \cap \mathscr{C}(s')$ si et seulement si g laisse stables les quatre sous-espaces F_1, F_2, F_3 et F_4.

6. Déterminer les endomorphismes qui commutent avec toutes les symétries.