Produit de Cauchy & Théorème de Mertens

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

à rendre le 07 mars 2016

■ ■ ■

Soient (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs réelles. Pour tout entier naturel n, on pose

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

La série $\sum c_n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$. Pour tout entier naturel n, nous noterons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$.

1. Un contre-exemple. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

a) Étudier le comportement de $\sum a_n$ et de $\sum b_n$.

b) Que dire du produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$?

2. Le cas positif. On suppose dans cette question que les suites (a_n) et (b_n) sont à termes positifs et que leurs séries convergent respectivement vers les réels A et B.

a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$C_n \leqslant A_n \cdot B_n.$$

b) En déduire que $\sum c_n$ est convergente vers un réel C.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cdot B_n \leqslant C_{2n}$. En déduire que $C = A \cdot B$.

3. Le cas absolument convergent. On suppose dans cette question que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument. On note A et B les limites respectives de $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leqslant M$ et $\sum_{k=0}^{n} |b_k| \leqslant N$, alors $\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leqslant MN$.

b) En déduire que $\sum c_n$ converge absolument. On notera C la limite de $\sum c_n$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} c_k \right| \leqslant | \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \sum_{k=0}^{n} |b_k| - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} |a_j \cdot b_{n-j}|.$$

En déduire que $C = A \cdot B$.

4. Application à la série exponentielle. Soient a, $b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge. Sa limite sera notée $e(a)$.

b) Montrer que $e(a) \cdot e(b) = e(a+b)$.

5. Théorème de Mertens. On suppose que $\sum a_n$ converge absolument et que $\sum b_n$ converge. On notera A et B les limites de $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

a) Montrer que si les suites $(C_{2n} - A_n B_n)$ et $(C_{2n+1} - A_{n+1} B_n)$ convergent vers 0, alors (C_n) converge vers un réel C tel que $C = AB$.

b) Conclure.

La question **1.** *montre qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse d'absolue convergence sur les deux séries.*