■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Calculs de limites) Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+3-\ln(x^2+4)$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x\ln(x))$.

Exercice 2. (Calculs d'intégrales) Déterminer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx$.

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$.
Écrire $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Exercice 3. Soit g la fonction définie pour tout $x > 1$ par

$$g(x) = 1 + x - \frac{2x\ln(x)}{x-1}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

2. En déduire $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Exercice 4. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que si $n \geqslant 2$, alors $n^2 > n+1$.

2. Montrer que si $n \geqslant 4$, alors $n! > n^2$.
On rappelle que $n! = 1\cdot 2\cdots n = \prod\limits_{k=1}^{n} k$.

Exercice 5.

1. On pose $a = 0.76767676\ldots$.
  a) Exprimer $100\cdot a$ en fonction de a.
  b) En déduire une expression de a sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Exprimer $0.123123123\ldots$ sous la forme d'une fraction irréductible.

3. Exprimer $3.1437373737\ldots$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 6. (Résolution d'(in)équations) Soit m un réel. Après avoir déterminé leur ensemble de définition, résoudre les (in)équations suivantes :

1. $\ln\sqrt{3x-1}+\ln\sqrt{x-1}=\ln(x-2)$.

2. $e^{2x}-3=4e^{-2x}$.

3. $0\leqslant(m+1)x+2-m$.

Exercice 7. (Nombres complexes)

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0.$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes. Les solutions devront être exprimées sous forme trigonométrique (c'est-à-dire en utilisant l'exponentielle complexe).

$$z+\frac{1}{z}=1,$$
$$z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}.$$

3. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z tel que

$$P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1.$$

a) Vérifier qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+a\left(z+\frac{1}{z}\right)+b.$$

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $P(z)=0$.

Exercice 8. (Étude de fonction) Pour tous x, $y\geqslant 1$, on pose

$$h(x,y)=\frac{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}}{y+xy+1}.$$

1. Soit $y\geqslant 1$. Déterminer le tableau de variation de la fonction $\tau\ :\ x\mapsto h(x,y)$. Vous préciserez les limites aux bornes.

2. Soit $x\geqslant 1$. Déterminer le tableau de variation de la fonction $\sigma\ :\ y\mapsto h(x,y)$. Vous préciserez les limites aux bornes.