■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Fonction trigonométrique réciproque) Soit $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2(x-\sin a)\cos a}{x^2 - 2x\sin a + 1}\right),$$
$$g(x) = \arctan\left(\frac{x-\sin a}{\cos a}\right).$$

1. Déterminer les domaines de définitions de f et de g que nous noterons respectivement $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.

2. Pour tout réel $x \in \mathscr{D}_g$, calculer $\sin(2g(x))$.

3. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, exprimer $f(x)$ à l'aide de $g(x)$.

Exercice 2. (Nombre d'or et Partie entière) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On admettra que φ est un nombre irrationnel. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On pose

$$\Delta_n = \lfloor \lfloor (n+1)\varphi \rfloor \varphi \rfloor - \lfloor \lfloor n\varphi \rfloor \varphi \rfloor .$$

1. Montrer que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

2. Montrer que $n - 1 < \frac{\lfloor n\varphi \rfloor}{\varphi} < n$.

3. En déduire que $\lfloor \lfloor n\varphi \rfloor \varphi \rfloor = \lfloor n\varphi \rfloor + n - 1$.

4. En déduire que $\Delta_n \in \{2, 3\}$.

Problème. (Théorème de comparaison de Sturm) Les parties **I**, **II** et **III** de ce problème sont indépendantes.

Partie I : Exemple

Nous cherchons, dans cette partie, à résoudre l'équation

$$(\sinh x)y'' + (2\cosh x)y' + (\sinh x)y = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Montrer qu'une fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^\star$ (resp. $\mathbb{R}_-^\star$) si et seulement si $z : x \mapsto y'(x) + \frac{1}{\tanh x} y(x)$ est solution d'une équation (E') d'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ (resp. $\mathbb{R}_-^\star$) que vous préciserez.

2. Résoudre l'équation (E') sur $\mathbb{R}_+^\star$.

3. Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est proportionnelle à $x \mapsto \frac{x}{\sinh x}$.

Partie II : Changement de variable

Soient a, b, c trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel a ne s'annule pas. Soit (E) l'équation différentielle $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$. Étant donnée une fonction z deux fois dérivable, pour toute fonction u deux fois dérivable, définissons $y : x \mapsto u(x)z(x)$.

4. Montrer que si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle que vous préciserez.

5. En déduire que si u est solution d'une équation (E'') linéaire d'ordre 1 (à préciser), alors z est solution d'une équation (E') de la forme

$$\alpha(x)z'' + \beta(x)z = 0,$$

où vous exprimerez les fonctions α et β en fonction de a, b, c et des dérivées successives de u.

6. Déterminer les solutions de (E'') puis l'équation (E') correspondante dans le cas où les fonctions a, b et c sont définies sur $\mathbb{R}$ et constantes.

Partie III : Entrelacement des zéros

Soient p, q deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et y_1 (resp. y_2) une solution non identiquement nulle de l'équation $y'' + p(x)y = 0$ (resp. $y'' + q(x)y = 0$).
On admet que les zéros de ces solutions sont isolés, c'est-à-dire que, pour chaque zéro de y_1 (resp. y_2), il existe un intervalle ouvert ne contenant que ce zéro de y_1 (resp. y_2). De manière plus formelle, pour tout $i \in \{1, 2\}$ et pour tout $x_0 \in I$ tel que $y_i(x_0) = 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\ t \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I,\ (y_i(t) = 0 \iff t = x_0).$$

Posons, pour tout réel x,

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

7. Donner une expression simple de la dérivée de W.

8. Supposons que pour tout x réel, $p(x) \geqslant q(x)$.

a) Soient $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y_2. On admet que $y_2'(x_1)y_2'(x_2) < 0$. Montrer que, si p n'est pas identiquement égal à q sur (x_1, x_2), alors y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

b) En déduire que si q est majorée par une fonction constante strictement positive ω^2, alors les zéros de y_2 sont distants d'au moins $\frac{\pi}{\omega}$.

c) En déduire que si p est minorée par une fonction constante strictement positive ω^2, alors tout intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur égale à $\frac{\pi}{\omega}$ contient au moins un zéro de y_1.

d) En déduire que si q est majorée par 0, alors y_2 admet au plus un zéro.

9. Supposons que $p = q$, i.e. y_1 et y_2 sont solution de la même équation différentielle.
Montrer que si y_1 et y_2 n'ont pas de zéro commun, alors y_1 admet exactement un zéro entre deux zéros consécutifs de y_2.

Partie IV : Équation de Bessel

Soient λ un réel et n le nombre de zéros sur un intervalle I de $\mathbb{R}_+^\star$ de longueur π d'une solution de l'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0.$$

10. Montrer que, si $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$, alors $n \leqslant 1$.

11. Que dire si $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$?