■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Calculs)

1. Déterminer
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right).$$

2. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+e^x)$.

Exercice 2. (Tangente d'une fonction $\mathscr{C}^1$ et périodique) Soient a et T deux réels strictement positifs et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et T-périodique.

1. Montrer qu'il existe $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2).$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x coupe le graphe de f au point d'abscisse $x+a$. Trouver une relation entre $f(x)$, $f(x+a)$ et $f'(x)$.

3. Montrer qu'il existe un réel x satisfaisant aux conditions de la question précédente.

Exercice 3. (Continuité au sens de Cesàro) Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels converge vers le réel x au sens de Cesàro si
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=x.$$

1. Montrer que si la suite de nombre réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (au sens usuel) vers le réel x, alors elle converge au sens de Cesàro vers x. Que pensez-vous de la réciproque ?

Une application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro en x si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge au sens de Cesàro vers x, la suite $(f(x_n))$ converge au sens de Cesàro vers $f(x)$.

2. Exemples.

a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction $f_1: x\mapsto ax+b$ est continue au sens de Cesàro en tout point de son ensemble de définition.

b) Montrer que la fonction $f_2: x\mapsto x^2$ n'est pas continue au sens de Cesàro en tout point de son ensemble de définition.

3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue au sens de Cesàro en un point $x_0\in\mathbb{R}$. On pose $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x+x_0)-f(x_0)$.

a) Montrer que g est continue au sens de Cesàro en 0.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par
$$\begin{aligned} u_{3n}&=a,\\ u_{3n+1}&=b,\\ u_{3n+2}&=-(a+b).\end{aligned}$$

b) Montrer que (u_n) converge au sens de Cesàro vers une limite que vous déterminerez.

c) Montrer que $g(a) + g(b) = -g(-a - b)$.

d) En déduire que $g(a + b) = g(a) + g(b)$.

e) Montrer que pour tout $(x, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $g(rx) = rg(x)$.

f) Soit (x_n) une suite de réels convergeant vers 0. Montrer qu'il existe une suite (y_n) telle que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^\star,\ x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

g) Montrer que g est continue en 0.

h) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g : x \mapsto \alpha x$.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont continues au sens de Cesàro en un point.

Problème. (Équation fonctionnelle) On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

1. f est dérivable en 0.
2. $f'(0) > 0$.
3. $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 + xy \neq 0\ \Rightarrow\ f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

On suppose que $\mathscr{E} \neq \emptyset$ et on considère une fonction $f \in \mathscr{E}$.

1. Premières propriétés.

a) Montrer que $f(0) = 1$.

b) Déterminer $f(1)$ et $f(-1)$.

2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) \neq 0$.

3 . a) Établir le tableau de variations de la fonction $\theta : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

b) Montrer que pour tout $t \in]-1, 1[$, $f(t) > 0$.

4. En utilisant la dérivabilité de f en 0, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\forall\ x \in]-\alpha, 0[,\ f(x) < 1,$$
$$\forall\ x \in]0, \alpha[,\ f(x) > 1.$$

5. On considère la suite définie par récurrence par $u_0 \in]0, 1[$ et

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n^2}.$$

a) Montrer que (u_n) converge vers 1.

b) En déduire que f n'est pas continue en 1.

6. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$.

a) Déterminer un réel $M(x) > 0$ (à expliciter) tel que pour tout réel $h \in]-M(x), M(x)[$, il existe un réel $y(h)$ tel que $x + h = \frac{x+y(h)}{1+xy(h)}$.

b) Soit $h \in]-M(x), M(x)[\backslash\{0\}$. En utilisant les notations de la question précédente, déterminer, en fonction de $f(x)$ et de $f(y(h))$, le taux d'accroissement de f entre x et $x + h$.

c) En déduire que f est dérivable au point x et calculer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.

7. On pose $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$ et $a = f'(0)$.

a) On considère la fonction

$$g: \begin{array}{rcl} I_1 \cup I_2 \cup I_3 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} f(x). \end{array}$$

Déterminer la dérivée de g sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3.

b) Montrer qu'il existe trois constantes C_1, C_2 et C_3 telles que

$$\forall\, k \in \{1,2,3\},\ \forall\, x \in I_k,\ f(x) = C_k e^{\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}.$$

8. On utilise les notations de la question précédente.

a) Déterminer la constante C_2.

b) Déterminer le produit $C_1 C_3$.

c) Montrer que $C_3 \in \{-1, 1\}$.

d) En déduire les fonctions f possibles.

9. Vérifier, réciproquement, uniquement dans le cas où $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, que la fonction est bien dans $\mathscr{E}$.