■ ■ ■

L'usage des calculatrices est **autorisé**.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Une étude de fonction) Soit f la fonction qui, à un réel x, associe $f(x) = \frac{x}{\ln(x)+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.

2. Montrer que f est dérivable sur son intervalle de définition $\mathscr{D}$ et calculer sa dérivée.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition $\mathscr{D}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

4. Ainsi prolongée, f est-elle dérivable en 0 ? f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 ?

5. Déterminer un développement limité de f à l'ordre 3 en 1. En déduire l'équation de la tangente, puis la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 1.

Exercice 2. (Équations de Mordell)

Partie I : Résolution de $y^2 = x^3 + 16$

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \wedge b = 1$. On rappelle que, si ab est un cube parfait, alors a et b le sont également.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que y soit impair et $y^2 = x^3 + 16$.

a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ un couple de nombres impairs tel que

$$y + 4 = a^3 \text{ et } y - 4 = b^3.$$

b) Montrer que $a = b + 8$ et $3b^2 + 24b + 64 = 1$.

c) Conclure.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que y est pair et $y^2 = x^3 + 16$.

a) Montrer que x et y sont divisibles par 4.

On note $x = 4x'$ et $y = 4y'$.

b) Montrer que y' est impair.

On note $y' = 2n + 1$.

c) Montrer que n et $n + 1$ sont des cubes parfaits, puis en déduire la valeur de x.

3. Déterminer l'ensemble des entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $y^2 = x^3 + 16$.

Partie II : Résolution de $y^2 = x^3 + 7$

4. Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 8 appartient à l'ensemble $\{0, 1, 4\}$.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $y^2 = x^3 + 7$.

a) Si x est pair, montrer que $y^2 \equiv 7 \ [8]$. En déduire que x est impair.

On suppose dans la suite que x est impair.

b) Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme X^3+8.

c) Montrer que $(x-1)^2+3$ possède un diviseur premier p congru à 3 modulo 4.

d) En utilisant l'entier p obtenu à la question précédente, montrer que $-1 \equiv y^2 \ [p]$.

6. En déduire l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $y^2 = x^3+7$.

Problème. (Procédé d'extrapolation de Richardson) Soit A une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que A admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k + o(t^k)$ son développement limité à l'ordre k au voisinage de 0, les coefficients a_k étant des réels.

1. Préliminaires.

a) Étant donné un réel ρ non nul et un entier naturel s, on suppose que φ est une fonction qui vérifie $\varphi(t) = o((\rho t)^s)$ lorsque $t \to 0$. Montrer que $\varphi(t) = o(t^s)$ lorsque $t \to 0$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on suppose que $\varphi(t) = o(t^k)$ lorsque $t \to 0$. Déterminer la limite lorsque $t \to 0$, $t \neq 0$, du quotient $\frac{\varphi(t)}{t^{k-1}}$.

2. Une suite de fonctions.

a) Montrer que $A(t)$ admet une limite lorsque $t \to 0$ et déterminer cette limite.

Soit r un réel vérifiant $r > 1$. On définit la suite des fonctions A_n par : pour t réel, $A_0(t) = A(t)$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $A_n(t) = \frac{r^n A_{n-1}(t) - A_{n-1}(rt)}{r^n - 1}$. Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tel que $k > n$.

b) Montrer qu'il existe un réel $a_{1,2}$, que l'on déterminera, tel que le développement limité de A_1 à l'ordre k au voisinage de 0 soit $A_1(t) = a_0 + a_{1,2}t^2 + \cdots + o(t^k)$.

c) En déduire qu'il existe un réel $a_{n,n+1}$, que l'on ne demande pas de déterminer, tel que le développement limité de A_n à l'ordre k au voisinage de 0 soit $A_n(t) = a_0 + a_{n,n+1}t^{n+1} + \cdots + o(t^k)$.

d) Soit t_0 un réel non nul fixé. Montrer que la suite de terme général $A(r^{-m}t_0)$ converge lorsque $m \to +\infty$.

Dans la suite, on suppose que pour tout $t_0 \neq 0$ fixé et $r > 1$, on sait calculer les premiers termes de la suite $A(t_0)$, $A(r^{-1}t_0), \ldots, A(r^{-m}t_0)$. Le **procédé de Richardson** consiste à extrapoler ces valeurs pour obtenir, grâce à un procédé d'accélération de convergence, la valeur de a_0.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0)$ puis, pour q entier vérifiant $1 \leqslant q \leqslant p$, on note $A_{p,q} = A_q(r^{-p}t_0)$.

3 . a) Justifier l'égalité $A_{p,0} = a_0 + o(r^{-p})$ lorsque $p \to +\infty$.

b) Déterminer un réel $\alpha(p,q) > 0$, que l'on explicitera, tel que $A_{p,q} = a_0 + O(r^{-\alpha(p,q)})$ lorsque $p \to +\infty$.

c) Pour $p \geqslant 1$, justifier l'égalité $A_{p,1} = \frac{rA_{p,0} - A_{p-1,0}}{r-1}$.

d) Pour $1 \leqslant q \leqslant p$, justifier l'égalité

$$A_{p,q} = \frac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \frac{1}{r^q - 1}(A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}).$$

Dans la pratique, on range les valeurs de $A_{p,q}$ pour $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant m$ dans un tableau triangulaire :

$$\begin{array}{lllll}
A_{0,0} & & & & \\
A_{1,0} & A_{1,1} & & & \\
A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
A_{m,0} & A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m}
\end{array}$$

4. Déterminer la plus petite valeur et la plus grande valeur de $\alpha(p,q)$ pour $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant m$. Lorsque $m \to +\infty$, de laquelle des valeurs $A_{p,q}$ du tableau peut-on attendre la meilleure approximation de a_0. On écrira cette valeur sous la forme $a_0 + O(r^{-\sigma(m)})$ lorsque $m \to +\infty$ et on précisera la valeur de l'entier $\sigma(m) > 0$.

On pourra utiliser la question **1.b)** *pour justifier la réponse.*

On considère une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note $g(\alpha + h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_{2k} h^{2k} + o(h^{2k})$ son développement limité à l'ordre $2k$ au voisinage de α.

5 . a) Exprimer les coefficients c_p pour $0 \leqslant p \leqslant 2k$, en fonction de g et de ses dérivées successives.

Pour $h \neq 0$, on note $G(h) = \frac{g(\alpha+h) - g(\alpha-h)}{2h}$.

b) Montrer que la fonction G est paire. Montrer que G se prolonge par continuité en 0 par une valeur que l'on déterminera.

On note $\widetilde{G}$ la fonction G prolongée en 0 par cette valeur.

c) Exprimer, à l'aide des coefficients c_p, le développement limité de $\widetilde{G}$ à l'ordre $2k-1$ au voisinage de 0.

Pour t réel positif, on note $A(t) = \widetilde{G}(\sqrt{t})$.

6 . a) On choisit $h > 0$ et on considère la suite de valeurs $G(h)$, $G\left(\frac{h}{2}\right), \ldots, G\left(\frac{h}{2^m}\right)$. Déterminer un réel $t_0 > 0$ et un réel $r > 1$ tels que cette suite de valeurs soit $A(t_0)$, $A(r^{-1}t_0), \ldots, A(r^{-m}t_0)$.

On utilise les notations des questions précédentes avec $A_0(t) = A(t)$, $A_{p,0} = A_0(r^{-p}t_0)$ puis $A_{p,q}$ pour les valeurs de r et t_0 déterminées dans la question **6.a)**.

b) Quelle est la limite ℓ de $A_{p,0}$ lorsque $p \to +\infty$? On exprimera ℓ en fonction de la fonction g et de α.

Dans ce qui suit, on pose $g : x \mapsto \ln(x)$, $\alpha = 3$ et $h = 0,8$.

7. Écrire une fonction Python qui calcule, en utilisant l'algorithme précédent, la meilleure approximation de ℓ.