* * *

1. Définitions

Définition. Soient I un ensemble fini et $(z_i)_{i\in I}$ une famille de nombres comlexes indexée par I. La somme des nombres complexes z_i, pour i parcourant l'ensemble I, est notée $\sum\limits_{i\in I} z_i$.
Par convention, si la famille I est vide, $\sum\limits_{i\in I} z_i = 0$.
Exemple. Soient m, $n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. On suppose que $I = [\![m, n]\!] = \{m, \dots, n\}$. On note alors

$$z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n = \sum_{k=m}^{n} z_k = \sum_{m\leq k\leq n} z_k.$$

Remarques.
* Dans la quantité $\sum\limits_{k=m}^{n} z_k$, la variable k est une variable locale. Ainsi, on peut écrire $\sum\limits_{k=m}^{n} z_k = \sum\limits_{i=m}^{n} z_i = \sum\limits_{\ell=m}^{n} z_\ell$. Le résultat de cette somme ne peut donc pas dépendre de k !
* Soient $(z_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$, $(y_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ deux familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. La commutativité de la somme ainsi que la distributivité de la somme par rapport au produit permet d'écrire

$$\sum_{k=m}^{n}(z_k + \lambda y_k) = \sum_{k=m}^{n} z_k + \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} y_k.$$

Exercice 1. Soient m, $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_1 = \sum\limits_{k=m}^{n} 1$.

2. $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} m$.

3. $S_3 = \sum\limits_{k=m}^{n} n$.

4. $S_4 = \sum\limits_{k=m+1}^{n} 2$.

Montrer les égalités suivantes (on pourra éventuellement utiliser un raisonnement par récurrence).

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

8. $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^n-1}{q-1}$, $q \neq 1$.

9. $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant les résultats précédents, calculer

10. $S_{10} = \sum\limits_{k=1}^{n}(k+\lambda)^2$.

11. $S_{11} = \sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$.

12. $S_{12} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2(n+1-k)$.

Plus particulièrement, on peut regrouper les sommes par paquets pour effectuer les calculs. Par exemple,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k &= \sum_{k=0}^{n}((-1)^{2k} + (-1)^{2k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{2k+1} \\ &= (n+1) - n = 1.\end{aligned}$$

Exercice 2. En regroupant par paquets judicieusement choisis, calculer

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{3n-1} \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$.

2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

En faisant intervenir les sommes des termes pairs et des termes impairs, calculer

3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} (2i)^k$.

4. $S_4 = \sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2$.

2. Changements d'indice

Le changement d'indice permet de transformer une somme afin de la calculer plus facilement. Cette technique s'apparente aux changements de variables dans les intégrales.

Exemple. Dans la somme suivante, on va effectuer le changement de variable $\ell = k-2$ (et utiliser les calculs de la partie précédente).

$$\sum_{k=3}^{n+2} k = \sum_{\ell=1}^{n} (\ell+2) = \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n(n+5)}{2}.$$

Exercice 3. (Méthode de Gauss pour la somme des entiers) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer les égalités suivantes.

1. $\sum_{k=1}^{2n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{\ell=1}^{n} (2n+1-\ell) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k$.

2. En déduire, sans récurrence, la valeur de $\sum_{k=1}^{2n} k$.

3. Généraliser la méthode précédente pour en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$.

Exercice 4. Soient a, $b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$a^n - b^n = (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Exercice 5. (Formule du binôme de Newton) Soient a, $b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En utilisant la formule du binôme de Newton et les relations classiques sur les coefficients binomiaux, calculer les sommes suivantes.

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

4. $S_4 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$.

3. Sommes téléscopiques

L'écriture sous forme télescopique permet de transformer une somme en la différence de deux sommes afin de la calculer plus facilement. Cette technique s'apparente au théorème fondamental du calcul différentiel.

Théorème. Soient $m,\, n \in \mathbb{N}$ et $(z_k)_{k\in[\![m,n+1]\!]}$ une famille de nombres complexes. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_m.$$

Démonstration. On utilise la méthode de changement d'indices décrite ci-dessus.

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} (z_{k+1} - z_k) &= \sum_{k=m}^{n} z_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} z_k\\ &= \sum_{\ell=m+1}^{n+1} z_\ell - \sum_{k=m}^{n} z_k\\ &= \sum_{\ell=m+1}^{n} z_\ell + z_{n+1} - z_m - \sum_{k=m+1}^{n} z_k\\ &= z_{n+1} - z_m.\end{aligned}$$

En écrivant la somme sous forme développée, on remarquera la façon dont les termes de la somme se *télescopent*.

□

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On se propose de retrouver la somme des n premiers carrés d'entiers.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

2. En utilisant la somme des n premiers entiers calculée précédemment, en déduire la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

3. Par une méthode analogue, retrouver la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

2. $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot (k!)$.

3. $S_3 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

4. Sommes multiples

Définition (Sommes doubles). Soient I, J deux ensembles finis et $(z_{ij})_{i\in I,\, j\in J}$ une famille de nombres complexes indexée par I et J. La somme des nombres complexes z_{ij} pour i parcourant l'ensemble I et j parcourant l'ensemble J, est notée (compte-tenu de la commutativité de la somme)

$$\sum_{i\in I,\, j\in J} z_{ij} = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} z_{ij} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} z_{ij}.$$

Exemples. Soient $m,\, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. On suppose que $I = [\![1, n]\!]$ et $J = [\![1, m]\!]$.

∗ On note alors

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} z_{ij}.$$

En écrivant les $(z_{ij})_{i\in I,\, j\in J}$ dans un tableau,

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m}\\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nm}, \end{pmatrix}$$

la première somme correspond à la somme des termes du tableau. Dans la deuxième somme, on somme dans un premiers temps chacune des colonnes pour ensuite sommer chacun des résultats obtenus. Dans la troisième somme, on somme dans un premier temps chacune des linges pour ensuite sommer chaun des résultats obtenus.

$\ast$ Parfois, dans des sommes doubles, les bornes de la seconde somme dépendent du paramètre de sommation de la permière. Par exemple,

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} z_{ij},$$

ou encore,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} z_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{ij}.$$

En écrivant les $(z_{ij})_{i\in I,\, j\in J}$ dans un tableau, dans la première série d'égalités, on somme dans les trois expressions les complexes

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1m} \\ & z_{22} & \cdots & z_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & z_{nm}; \end{pmatrix}$$

dans la deuxième série d'égalités, on somme dans les trois expressions les complexes

$$\begin{pmatrix} \times & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ & \times & \cdots & z_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Soient m, n deux entiers non nuls et $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(v_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ deux familles de nombres complexes. Montrer que

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} u_i v_j = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} v_j\right).$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Caluler les sommes suivantes.

1. $S_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij$.

2. $S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \inf(i,j)$.

3. $S_3 = \sum_{1\leq i<j\leq n} ij$.

4. $S_4 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \inf(i,j)$.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, $(b_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ deux familles de nombres complexes. Justifier les égalités suivantes (où nous supposons que a_j et b_j sont nuls dès que $j > n$).

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j X^{i+j} \\ &= \sum_{\ell=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{\ell} a_j b_{\ell-j}\right) X^{\ell}.\end{aligned}$$

Rappelons (relations coefficients / racines, formule de Poincaré) qu'il est utile de généraliser les sommes doubles à des sommes multiples…