Équations différentielles
Suites récurrentes

* * *

1. Équations différentielles linéaires

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1.1. Équations du premier ordre

Définition. Soient a, b, c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t). \tag{1}$$

(i) On dit qu'une fonction f, dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle (1) si pour tout $t \in I$, $a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t)$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation.

(ii) Lorsque c est la fonction identiquement nulle, on dit que l'équation différentielle est homogène (ou sans second membre). On notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (1).

Théorème. On suppose que a ne s'annule pas sur I. Notons A une primitive de $t \mapsto -\frac{a(t)}{b(t)}$ sur I.

(i) Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension 1 :

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

(ii) L'ensemble des solutions de l'équation (1) est un espace affine. En notant y_p une solution de l'équation,

$$\mathcal{S} = \{y_p + \lambda e^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

(iii) Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution f de l'équation différentielle (1) telle que $f(t_0) = y_0$.

Méthode de la variation de la constante. Pour trouver une solution de particulière de l'équation différentielle (1), on utilise la méthode de la variation de la constante en identifiant une fonction $\lambda : I \to \mathbb{K}$ dérivable telle que $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ soit solution de (1).

Principe de superposition. Si f_1 est solution de l'équation (1) avec second membre c_1 et f_2 est solution de l'équation (1) avec second membre c_2, alors $f_1 + f_2$ est solution de l'équation (1) avec second membre $c_1 + c_2$.

1.2. Équations du second ordre à coefficients constants

Définition. Soient a, b, c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t). \tag{2}$$

(i) On dit qu'une fonction f, deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle (2) si pour tout $t \in I$, $a(t)f''(t) + b(t)f'(t) + c(t)f(t) = d(t)$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation.

(ii) Lorsque d est la fonction identiquement nulle, on dit que l'équation différentielle est homogène (ou sans second membre). On notera $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (1).

Théorème.

(i) L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.

(ii) L'ensemble des solutions de l'équation (2) est un espace affine.

(*iii*) Soit $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution f de l'équation différentielle (2) telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y_0'$.

Principe de superposition. Si f_1 est solution de l'équation (2) avec second membre d_1 et f_2 est solution de l'équation (2) avec second membre d_2, alors $f_1 + f_2$ est solution de l'équation (2) avec second membre $d_1 + d_2$.

1.2.1. Équation homogène à coefficients constants

On n'étudie ici que les solutions de l'équation homogène lorsque a, b, c sont des fonctions *constantes* et $a \neq 0$.
Le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soient r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
∗ Si $r_1 \neq r_2$,
$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\ ;\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}\}.$$
∗ Si $r_1 = r_2 = r_0$,
$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}\ ;\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}\}.$$
Le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soient r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
∗ Si $r_1 \neq r_2$ et r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}\ ;\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
∗ Si $r_1 = r_2 = r_0 \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}\ ;\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
∗ Si r_1, r_2 sont deux racines complexes conjuguées que nous noterons $\alpha \pm i\beta$,
$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda e^{\alpha t} \cos \beta t + \mu e^{\alpha t} \sin \beta t\ ;\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

1.2.2. Solutions particulières

On suppose toujours que a, b, c sont des fonctions *constantes*.
Lorsque $d = P$ est un polynôme. On note $n = \deg(P)$. L'équation différentielle admet comme solution particulière une fonction polynomiale de degré
∗ n si $c \neq 0$,
∗ $n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
∗ $n + 2$ si $b = c = 0$.
Lorsque $d\ :\ t \mapsto e^{mt} P(t)$. On note $n = \deg(P)$. L'équation différentielle admet comme solution particulière de la forme $t \mapsto e^{mt} Q(t)$, où Q est une fonction polynomiale de degré
∗ n si m n'est pas racine de l'équation caractéristique,
∗ $n + 1$ si m est racine simple de l'équation caractéristique,
∗ $n + 2$ si m est racine double de l'équation caractéristique.
Lorsque $d\ :\ t \mapsto \cos(mt) P(t)$ ou $\sin(mt) P(t)$. On utilise la technique précédente et le principe de superposition (via les formules d'Euler).

2. Suites récurrentes linéaires

Soient a, b, $c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants toute suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant une relation du type
$$a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0. \tag{3}$$
On note $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des suites satisfaisant la relation de récurrence (3). $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel de dimension 2.
Le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soient r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

∗ Si $r_1 \neq r_2$,

$$\mathcal{S}_0 = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \ \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

∗ Si $r_1 = r_2 = r_0$,

$$\mathcal{S}_0 = \{((\lambda n + \mu) r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \ \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

Le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soient r_1, r_2 les solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.
∗ Si $r_1 \neq r_2$ et r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}_0 = \{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

∗ Si $r_1 = r_2 = r_0 \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{S}_0 = \{((\lambda n + \mu) r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

∗ Si r_1, r_2 sont deux racines complexes conjuguées que nous noterons $re^{\pm i\omega}$,

$$\mathcal{S}_0 = \{(\lambda r^n \cos \omega n + \mu r^n \sin \omega n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \ \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

3. Suites définies par récurrence

Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On considère la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = a$.
Stabilité. Vérifier qu'il existe un intervalle J contenant a stable par f. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
Variations. Sens de variation de u.
Soit on étudie la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

(i) Si pour tout $x \in J$, $f(x) \geq x$, u est croissante.

(ii) Si pour tout $x \in J$, $f(x) \leq x$, u est décroissante.

Soit on étudie la fonction $x \mapsto f(x)$.

(i) Si f est croissante sur J, u est monotone (on compare alors u_0 et u_1).

(ii) Si f est décroissante sur J, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

Point fixe. Lorsque f est *continue*, si u converge, elle converge vers un point fixe de f, i.e. un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. On recherche donc les solutions de l'équation $f(x) = x$, $x \in J$.
Conclusion. On utilise un théorème de convergence des suites (théorèmes de convergence monotone, de convergence des suites extraites...) pour conclure.
Lorsque la fonction f est lipschitzienne sur J, de constante de Lipschitz strictement plus petite que 1, on peut montrer qu'il y a convergence exponentielle de la suite vers sa limite.