Études de courbes

* * *

1. Courbe plane définie par une équation $y = f(x)$

1. Recherche de l'intervalle de **définition** $\mathcal{D}$.
2. Réduction de l'intervalle d'étude

(i) Fonction paire : $f(-x) = f(x)$, étude sur $\mathcal{D} \cap [0, +\infty[$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) Fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$, étude sur $\mathcal{D} \cap [0, +\infty[$, symétrie centrale de centre $O(0, 0)$.

(iii) $f(t_0 - x) = f(t_0 + x)$, étude sur $\mathcal{D} \cap [t_0, +\infty[$, symétrie par rapport à l'axe $x = t_0$.

(iv) $f(t_0 - x) = -f(t_0 + x)$, étude sur $\mathcal{D} \cap [t_0, +\infty[$, symétrie centale de centre $(t_0, 0)$.

(v) Périodicité : $f(x + T) = f(x)$, étude sur $\mathcal{D} \cap [-T/2, T/2]$, translation de vecteur $nT\overrightarrow{i}$.

3. Régularité : continuité et dérivabilité sur chaque intervalle, valeurs aux bornes, prologements éventuels par continuité.
4. Variations : Étude des variations et tracé du tableau des variations.
5. Convexité : lorsque f est deux fois dérivable, étude du signe de f''.
6. Branches infinies.

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, asymptote verticale d'équation $x = a$.

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$, asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

(a) Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to \infty} = f(x) - ax = b$, droite asymptote d'équation $y = ax + b$.

(b) Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to \infty} = f(x) - ax = \infty$, branche parabolique de direction $y = ax$.

(c) Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, branche parabolique de direction $x = 0$, i.e. d'axe (Oy).

Dans le cas d'une branche parabolique, la courbe ne se rapproche d'aucune droite fixe.

Si une des limites précédentes n'existe pas, on ne peut en général rien conclure.

Position de la courbe par rapport aux asymptotes.
7. Tracé (mise en valeur des tangentes et points remarquables).

2. Courbes paramétrées

Soit $\Gamma = (I, f)$ une courbe paramétrée par une fonction $f = (x, y)$.
1. Recherche de l'intervalle de **définition** $\mathcal{D}$ de x et de y.
2. Réduction de l'intervalle d'étude.

(i) Si $x(t + T) = x(t)$ et $y(t + T) = y(t)$, étude de la courbe sur $\mathcal{D} \cap [-T/2, T/2]$.

(ii) Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, étude sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$.

(iii) Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, étude sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(iv) Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, étude sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$, symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

(v) Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, étude sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$, symétrie centrale de centre $O(0, 0)$.

En posant $u = \pm\frac{1}{t}$ (étude sur $\mathcal{D} \cap [-1, 1]$) ou $u = 2t_0 - t$ (étude sur $\mathcal{D} \cap [t_0, +\infty[$).

(i) Si $x(u) = x(t)$ et $y(u) = -y(t)$, symétrie d'axe (Ox).
(ii) Si $x(u) = -x(t)$ et $y(u) = y(t)$, symétrie d'axe (Oy).
(iii) Si $x(u) = -x(t)$ et $y(u) = -y(t)$, symétrie centrale de centre O.
(iv) Si $x(u) = y(t)$ et $y(u) = x(t)$, symétrie d'axe $y = x$.
(v) Si $x(u) = -y(t)$ et $y(u) = -x(t)$, symétrie d'axe $y = -x$.
(vi) Si $x(u) = 2a - x(t)$ et $y(u) = y(t)$, symétrie d'axe $x = a$.

3. Régularité & Variations : étude des variations de x et y, tracé du tableau des variations.

4. Points stationnaires.

En effectuant des développements limités ou en calculant des dérivées successives, on cherche les plus petits entiers non nuls $p < q$ tels que $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ soit une famille libre.

(i) p impair, q pair, point banal.
(ii) p impair, q impair, point d'inflexion.
(iii) p pair, q impair, point de rebroussement de première espèce.
(iv) p pair, q pair, point de rebroussement de seconde espèce.

Description du point stationnaire incluant la tangente à la courbe.

5. Branches infinies. Correspond à un paramétrage t_0 pour lequel $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

(i) Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, asymptote d'équation $y = y_0$.
(ii) Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \infty$, asymptote d'équation $x = x_0$.
(iii) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$, branche parabolique de direction (Oy).
(iv) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, branche parabolique de direction (Ox).
(v) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^\star$.
  (a) Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = \infty$, branche parabolique de direction $y = ax$.
  (b) Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b$, droite asymptote d'équation $y = ax + b$.
  Si une des limites précédentes n'existe pas, on ne peut en général rien conclure.

Position par rapport aux asymptotes.

6. points d'inflexion. Parmi les points réguliers, un point d'inflexion correspond à un extremum de la quantité $\frac{y'}{x'}$.

7. Points doubles. Recherche des solutions du système d'équations $x(t) = x(u)$, $y(t) = y(u)$, $t \neq u$.

8. Tracé (mise en valeur des tangentes et points remarquables, on pourra préciser le sens des t croissants).

Lorsque la courbe est définie par une équation polaire $f(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}_\theta$, on pourra se ramener à une équation cartésienne en posant $x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta)$, $y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta)$.

Symétries.

(i) Si $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, étude sur $\mathbb{R}_+$.
(ii) Si $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, étude sur $\mathbb{R}_+$, symétrie de centre O.
(iii) Si $\rho(\theta + \theta_0) = \rho(\theta)$, étude sur $[0, \theta_0]$, rotation d'angle θ_0.
(iv) Si $\rho(\theta_0 - \theta) = \rho(\theta_0 + \theta)$, étude sur $[\theta_0, +\infty[$, symétrie d'axe $\theta = \theta_0$.

Asymtotes. La courbe admet une branche infinie lorsque $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = \infty$. Si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = \lambda$, droite asymptotique d'équation $\rho(\theta) = \frac{\lambda}{\sin(\theta - \theta_0)}$.

Si $\lim\limits_{\theta \to \infty} \rho(\theta) = \rho_0$, la courbe admet un cercle asymptote d'équation $\rho(\theta) = \rho_0$.