Devoir à la Maison

Calculs élémentaires & Trigonométrie circulaire

à rendre le mardi 15 septembre 2009

* * *

Exercice 1.

1. On se propose d'étudier la fonction

$$f\ :\ \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto (x+1)\ln\frac{x+4}{x+3} - \ln 2. \end{cases}$$

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Montrer que cette fonction s'annule une seule fois en un point que nous noterons x_0.

On admettra que x_0 appartient à l'intervalle $[4;5]$.

2. On cherche les entiers n tels que

$$(n+3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

a) Cette égalité est-elle vraie pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$\sum_{k=3}^{n+2} k^{n+1} < (n+3)\sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

c) Pour $n \geq 5$, montrer que $(n+3)^n > \displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} k^n$.

d) Conclure

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x^2+x+1| > |x-4|.$$

Problème. (Éléments de géométrie du triangle) Soit ABC un triangle non dégénéré. On note a (resp. b, c) la longueur du côté $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$). On appelle α (resp. β, γ) l'angle $\widehat{CAB}$ (resp. $\widehat{CBA}$, $\widehat{BCA}$).

1. Montrer la formule des sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

2. On note A_1 (resp. B_1, C_1) l'intersection de la bissectrice issue de A (resp. B, C) avec le côté $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$).

a) Montrer que $c\,A_1C = b\,BA_1$. En déduire que A_1 est le barycentre des points pondérés $(B;b)$, $(C;c)$.

b) En déduire que les bissectrices du triangle ABC sont concourrantes en un point I qui est le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b), (C,c), propriété que l'on notera

$$I = \mathcal{B}\left((A;a)(B;b)(C;c)\right).$$

c) Le point I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC. On note r son rayon. Montrer que

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{a+b+c}{2}r.$$

3. On note A_2 le pied de la hauteur issue de A, B_2 le pied de la hauteur issue de B et C_2 le pied de la hauteur issue de C.

a) Montrer que

$$A_2 = \mathcal{B}\left((B; b\cos\alpha\cos\gamma)(C; c\cos\alpha\cos\beta)\right).$$

b) En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourrantes en un point H dont on donnera les coordonnées barycentriques par rapport aux points A, B, C.

4. On appelle A_3 le milieu du segment $[BC]$, B_3 le milieu du segment $[AC]$ et C_3 le milieu du segment $[AB]$.

a) Montrer que le triangle $A_3B_3C_3$ est semblable au triangle ABC.

b) En déduire que les médiatrices du triangle ABC sont concourrantes en un point O dont les coordonnées barycentriques par rapport aux points A, B, C sont données par

$$O = \mathcal{B}\left((A; a\cos\alpha)(B; b\cos\beta)(C; c\cos\gamma)\right).$$

c) En notant R le rayon du cercle circonscrit, montrer que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$