Devoir à la Maison

Géométrie et Équations différentielles

à rendre le lundi 05 novembre 2009

* * *

Un grand soin devra être apporté à la clarté et à la concision de la rédaction.

* * *

Exercice 1. (Une équation fonctionnelle) Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels x et y,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

1. On commence par étudier la fonction f.

a) Montrer que si $f(0)=0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.

b) Montrer que f est paire et que $f'(0)=0$.

2. Montrer que pour tous réels x, y,

$$f''(x)f(y)=f(x)f''(y).$$

3. En déduire que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant les hypothèses.

Exercice 2. (Cercles de Chasles) Dans cet exercice, on identifie le plan avec le plan complexe. Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a>b$. On pose $c=\sqrt{a^2-b^2}$ et on note $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Soit M un point de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'affixe z. On lui associe un point M' d'affixe z' telle que $z^2+(z')^2=c^2$.

1. Une propriété d'orthogonalité.

a) Déterminer les points associés à chacun des quatre sommets de l'ellipse.

b) Montrer que $(c-z)(c+z)=(z')^2$ et en déduire que $(OM')^2=MF\cdot MF'$, où F et F' désignent les foyers de l'ellipse.

c) Montrer que la droite (OM') est orthogonale à la bissectrice intérieure à l'angle FMF'.

2. Étude des relations entres les points et leurs associés.

a) Établir les relations

$$|z-c|^2+|z+c|^2=2(|z|^2+c^2) \text{ et } MF+MF'=M'F+M'F'.$$

b) En déduire que $M'\in\mathcal{E}$.

c) Expliquer comment on peut construire, pour tout point M de $\mathcal{E}$, les points qui lui sont associés.

d) Faire une figure en plaçant deux points quelconques de l'ellipse M_1 et M_2, ayant les mêmes associés M_1' et M_2'. Les droites (M_1M_2) et $(M_1'M_2')$ s'appellent des diamètres conjugués.

3. Construction des cercles de Chasles. Soient P, P' les deux points d'affixes respectives $u=z+iz'$ et $u'=z-iz'$.

a) Montrer que $MF+MF'=OP+OP'$.

b) On écrit sous forme algébrique $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$. Montrer que $xy+x'y'=0$ puis que $x^2+(x')^2=a^2$.

c) Montrer que quand M décrit l'ellipse $\mathcal{E}$, les points P et P' décrivent deux cercles dont on précisera les caractéristiques.

d) Faire une figure de l'ellipse et de ces deux cercles comportant les constructions des points P et P' à partir d'un couple de points associés (M,M').

Exercice 3. (Les formules de Cràmer) On se propose d'étudier les solutions des systèmes linéaires à 2 et 3 inconnues d'un point de vue géométrique. Nous allons voir comment résoudre ces systèmes à l'aide du calcul de déterminants, sans utiliser la méthode du pivot de Gauss.

Systèmes à deux équations, deux inconnues. Soit $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^6$. On considère le système d'équations d'inconnues x et y

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 & (2) \end{array}\right.$$

On considère le plan euclidien muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b}$) le vecteur de coordonnées cartésiennes (a_{11}, a_{21}) (resp. (a_{12}, a_{22}), (b_1, b_2)).

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'équations respectives (1) et (2) aient un unique point d'intersection. On exprimera cette condition à l'aide du déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

2. On suppose dans cette question que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$.

a) Écrire le système d'équations comme une équation vectorielle.

b) En utilisant les propriétés du déterminant, montrer que la solution du système est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

3. On supppose dans cette question que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

a) Montrer que si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}) = \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}) = 0$, le système possède une infinité de solutions.

b) Montrer que si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}) \neq 0$ ou $\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}) \neq 0$, le système n'a pas de solution.

Systèmes à trois équations, trois inconnues. Soit $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^9$. On considère le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 & (2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & b_3 & (3) \end{array}\right.$$

Montrer que lorsque $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, la solution du système est unique et est donnée par

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ces formules peuvent être généralisées à des dimensions supérieures. En pratique, elles n'ont que peu d'intérêt pour la résolution des systèmes car calculer un déterminant est très couteux en temps de calcul. Cependant, elles ont une utilité théorique. Par exemple pour exprimer la continuité des solutions d'un système en fonction de ses coefficients.