Devoir à la Maison

Relations binaires, Sous-groupes de $\mathbb{R}$

à rendre le lundi 30 novembre 2009

* * *

Exercice 1. (Exemple de relation d'équivalence) Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si et seulement si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.
Pour x, $y \in \mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff xe^y = ye^x.$$

1. La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?
2. Pour tout réel x, on cherche à décrire la classe de x, c'est-à-dire l'ensemble noté $cl(x)$ défini par

$$cl(x) = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ x\mathcal{R}y\}\,.$$

a) Montrer que $cl(0) = \{0\}$.
b) Étudier les variations de la fonction $\begin{array}{rl} f: \mathbb{R}^\star & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \frac{e^y}{y} \end{array}$.
c) Montrer que si $x \in]-\infty, 0[\cup\{1\}$, $cl(x) = \{x\}$.
d) Conclure l'étude pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) Entre deux éléments distincts de $\mathbb{R}$ il existe au moins un élément de A.

(ii) Tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.

On dit alors que A est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par

$$A = \left\{\frac{k}{2^n}\ ;\ n \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N},\, 0 \leq k \leq 2^n\right\}$$

est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 3. (Sous-groupes de $\mathbb{R}$) On rappelle que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe. On dit que $G \subset \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ si et seulement si

(i) G est stable par la loi $+$: $\forall\, x, y \in G$, $x + y \in G$,

(ii) G est stable par passage au symétrique : $\forall\, x \in G$, $(-x) \in G$,

(iii) G contient l'élément neutre : $0 \in G$.

1. Montrer que $(G, +)$ est un groupe.
Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ tel que $G \neq \{0\}$.
2. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ possède une borne inférieure. On note $m = \inf\{x \in G,\, x > 0\}$.
3. On suppose dans cette question que $m > 0$.
a) On suppose que $m \notin G$.

(i) Montrer qu'il existe $g_1 \in G$ tel que $m < g_1 < 2m$.

(ii) Montrer qu'il existe $g_2 \in G$ tel que $m < g_2 < g_1$.

(iii) En considérant $g_2 - g_1$, montrer que $m \in G$.

b) En déduire que $G = m\mathbb{Z}$.

4. On suppose dans cette question que $m = 0$. Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $g' \in G$ tel que $\theta + \frac{\varepsilon}{2} \leq g' < \theta + \varepsilon$.

c) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

5. Dans cette question, nous allons appliquer le résultat précédent. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On note

$$G_\omega = \left\{a + b\omega,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

a) Montrer que G_ω est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $\omega = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors $G_\omega = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.

c) Montrer que si $\omega \notin \mathbb{Q}$, alors G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.

d) En déduire que la suite $(e^{in\omega})_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique si ω est rationnel et est dense dans le cercle unité si ω est irrationnel.