

* * *

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}^3$. On pose $E_1 = \{(x, y, z) \in E ; x + y + z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in E ; x = -y = z\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels.

2. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

3. Soit p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 . Pour tout $u = (x, y, z) \in E$, déterminer $p(u)$ en fonction de x , y et z .

Exercice 2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$ et $g = p \circ q$.

1. Montrer que $g \circ g = g$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. S'il existe un vecteur x non nul tel que $p(x) = \lambda x$, on dit que λ est une valeur propre de p .

Montrer que si λ est une valeur propre de p , alors $\lambda \in \{0, 1\}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et x un vecteur non nul tels que $f(x) = \lambda x$. On dit que λ est une valeur propre de f .

Montrer que $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

4. Montrer que f est non injective si et seulement si $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \neq \{0\}$.

5. Montrer que 2 est une valeur propre de f si et seulement si $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \neq \{0\}$.