

* * *

Exercice 1. Soit f une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, de classe \mathcal{C}^2 , strictement convexe telle que $f(1) = 1$. On note $f_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et on suppose que $f_n(0)$ est croissante. On note $m = f'(1)$.

1. Étude de la suite $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que la suite $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite que nous noterons q .

b) Montrer que $f(q) = q$.

2. Soient $q_1, q_2 \in]0, 1[$ deux solutions distinctes de l'équation $f(s) = s$.

a) Montrer qu'il existe deux réels distincts $\xi_1, \xi_2 \in]0, 1[$ tels que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$.

b) En déduire que l'équation $f(s) = s$ admet une unique solution dans $]0, 1[$.

Le cas $m \leq 1$

3. Soit g la fonction définie pour tout $s \in [0, 1]$ par $g(s) = f(s) - s$.

a) Montrer que la fonction g est strictement décroissante.

b) En déduire que pour tout $s \in [0, 1[$, $f(s) > s$.

4. Montrer par l'absurde que $q = 1$.

Le cas $m > 1$

5. Montrer qu'il existe un réel $s_0 \in [0, 1[$ tel que pour tout $s \geq s_0$, $f(s) < s$.

6. Montrer que $q \in [0, 1[$.