Devoir à la Maison

Une somme de Riemann

à rendre le lundi 15 février 2010

* * *

Exercice 1. On cherche dans cet exercice à calculer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right].$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathbb{R}[X]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de Q_n, son coefficient dominant et sa parité.

3. Déterminer les racines de Q_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

4. Une somme de sinus. Soit n un entier naturel.

a) Prouver que $Q_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$.

5. Calcul de la limite.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan} x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

b) En déduire $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

6. Approximations.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{2(2n+1)}$.

b) Écrire une fonction `approx(p)` dans un langage de programmation de votre choix qui prend comme argument un entier naturel `p` et renvoie une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à $10^{-\texttt{p}}$ près.