Devoir à la Maison

Matrices et Structures algébriques

à rendre le lundi 08 mars 2010

* * *

Dans ce problème, on étudie les propriétés de l'ensemble

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont appelés des matrices carrées d'ordre 2. On dit que deux matrices $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ sont égales, on notera $A_1 = A_2$, si et seulement si $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ et $d_1 = d_2$. On note également $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les trois lois suivantes. Pour $A_1,\ A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

∗ $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$.

∗ $A_1 \times A_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$.

∗ $\lambda \cdot A_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix}$.

Questions de structures

1. Calculs autour de la loi $+$.

a) Montrer que la loi $+$ est associative et commutative.

b) Quelle est la structure de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$?

c) En déduire la structure de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2. Premiers calculs autour de la loi $\times$.

a) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A_1 \times A_2$ et $A_2 \times A_1$.

b) La loi $\times$ est-elle associative ? commutative ?

c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $A \times I_2$ et $I_2 \times A$.

d) Quelle est la structure de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$?

3. Une application de la formule du binôme de Newton. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $(A + I_2)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k$.

b) En déduire l'expression de A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Des sous-ensembles et leur structure

4. L'ensemble des matrices d'ordre 2 inversibles. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calculer $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2$.

b) En déduire que A admet un symétrique pour $\times$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on dit que A est inversible et on note A^{-1} son inverse.

c) Donner l'expression de A^{-1}.

d) On note $Gl_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\ ;\ ad - bc \neq 0 \right\}$. Quelle est la structure de $(Gl_2(\mathbb{R}), \times)$?

5. Le groupe spécial linéaire. On note $Sl_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \, a, \, b, \, c, \, d \in \mathbb{Z} \; ; \; ad - bc = 1 \right\}$.

a) Montrer que la loi $\times$ est une loi interne sur $Sl_2(\mathbb{Z})$.

b) En déduire que $Sl_2(\mathbb{Z})$ est un groupe non commutatif.

Applications linéaires & Matrices

Nous noterons dans toute la suite $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Nous allons, dans cette partie, étudier le lien entre matrices et applications linéaires via la composition et le changement de base.

Soient $f : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (3x + 2y, 4x - 5y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, 2x - y) \end{array}$. On définit les matrices d'ordre 2 suivantes : $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Remarques sur les applications f et g.

a) Identifier Im (f) et Ker (f).

b) La fonction f est-elle bijective ?

c) Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f \circ g((x, y))$ puis $M \times N$.

d) Que constatez-vous ?

7. Une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$.

a) Soient $e_1 = (3, 2)$ et $e_2 = (1, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $\varphi \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui envoie $(1, 0)$ sur e_1 et $(0, 1)$ sur e_2. Montrer que φ est inversible et calculer φ^{-1}.

On note $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Le changement de base.

a) Exprimer les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base (e_1, e_2). On notera $f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ et $f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$.

On note $M_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $M_1 = P^{-1}MP$.

A. Camanes