

\* \* \*

Pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$ , on définit le symbole de Kronecker par  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  sinon. Dans tout cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $(a_1, \dots, a_n)$  une famille de nombres réels distincts.

**1.** Une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**a)** Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ .

**b)** Montrer que la famille  $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**2.** Soit  $\pi$  l'application définie pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  par  $\pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$ .

**a)** Montrer que  $\pi$  est un projecteur de  $\mathbb{R}[X]$ .

**b)** Déterminer le noyau et l'image de  $\pi$ .

**c)** Vérifier que  $\text{Im}\pi \oplus \text{Ker}\pi = \mathbb{R}[X]$ .

**d)** Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

**3.** Soit  $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$P \mapsto (P(a_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

**a)** Montrer que  $\varepsilon$  est un isomorphisme.

**b)** Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $P(a_i) = f(a_i)$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction  $f$  aux points  $(a_1, \dots, a_n)$ .

**4.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$  et  $x \in [a, b]$ . On suppose que  $a \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$  et on note  $P$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à  $f$ . Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi \in ]a, b[ ; |f(x) - P(x)| \leq \sup_{[a, b]} |f^{(n)}| \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!}.$$

On pourra considérer la fonction  $\varphi(t) = f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^n (t - a_i)$ , où  $K$  est une constante judicieusement choisie.