Devoir à la Maison

Les Carrés Magiques

à rendre le mardi 06 avril 2010

* * *

On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ satisfaisant, pour tout $j \in [|1,3|]$,

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i} = s.$$

Une telle matrice est appelée un *carré magique* : la somme de chacune de ses lignes est égale à la somme de chacune de ses colonnes, qui sont égales à la somme de chacune de ses diagonales. Cette quantité s sera appelée nombre magique. On se propose de décrire l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3.

1. Montrer que l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3 est un espace vectoriel.

2. Les matrices antisymétriques.

a) Soit A une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

b) Étant donné un carré magique antisymétrique, déterminer le nombre magique associé.

c) Montrer que l'ensemble des carrés magiques antisymétriques est un espace vectoriel de dimension 1.

3. Les matrices symétriques. Soit A un carré magique symétrique.

a) Montrer que la matrice $B = A - \frac{s}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un carré magique.

b) Exprimer la matrice B en fonction de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Décrire l'ensemble des carrés magiquess symétriques.

4. Déduire des questions précédentes que l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3 est

$$\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$