Devoir à la Maison

Autour des courbes paramétrées

à rendre le lundi 12 avril 2010

* * *

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé et a un réel non nul. Étant donnée une courbe $\mathcal{C}$ on notera M un de ses points et $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ le repère de Frénet associé.

Autour de la chaînette

1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation paramétrique $\left(a \ln t, \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right)$ pour $t > 0$. Déterminer son équation cartésienne.

2. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On s'intéresse à l'équation différentielle $ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$, $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$ (équation régissant la tension d'un fil).

a) Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{y''(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$.

b) En déduire que $y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

3. Quelques généralités.

a) Étant donnée une courbe définie par son équation cartésienne $y = f(x)$, calculer son rayon de courbure à l'abscisse x en fonction des dérivées de y.

b) Soit N le point d'intersection entre la normale à la courbe en x et l'axe des abscisse. On appelle normale la distance NM. Montrer que $\overline{NM} = y \frac{ds}{dx}$.

4. Déterminer l'abscisse curviligne et le rayon de courbure de $\mathcal{C}$ et montrer qu'il est égal à la normale.

Développée

On appelle centre de courbure le point Ω défini par $\overrightarrow{M\Omega} = \frac{1}{\gamma}\overrightarrow{N}$.

5. On appelle développée d'une courbe le lieu de ses centres de courbure.

a) Montrer que la développée de $\mathcal{C}$ est la courbe paramétrée par $(a(t - \frac{\operatorname{sh}(2t)}{2}), 2a \operatorname{ch}(t))$.

b) Étudier et tracer la développée de $\mathcal{C}$.

La chaînette en mouvement

6. La chaînette $\mathcal{C}$ roule sans glisser sur la droite (Ox), i.e. l'abscisse du point de contact entre $\mathcal{C}$ et (Ox) est égal à une constante près à son abscisse curviligne. Déterminer le lieu du centre de courbure au point de contact (on dit que la chaînette est la *roulette parabolique de Delaunay*).

La courbe orthoptique

Cette partie est indépendante des précédentes. Soit a un réel strictement positif.

7. Tracer la courbe $\mathcal{A}$, appelée astroïde, d'équation paramétrique $(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$.

8. Déterminer et tracer la courbe orthoptique de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des points d'où l'on peut mener au moins deux tangentes à $\mathcal{A}$ orthogonales.