# Correction du Devoir à la Maison

Gram-Schmidt, Projections, Distances

à rendre le lundi 31 mai 2010

* * *

**Solution.**

**1.** Nous noterons $\alpha\ :\ x \mapsto 1$, $\beta\ :\ x \mapsto x$, $\gamma\ :\ x \mapsto x^2$, $\delta\ :\ x \mapsto x^3$.

$\ast$ Montrons que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
En utilisant les notations précédentes, $E = \text{Vect}\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cos\}$, donc $E$ est un espace vectoriel.

$\ast$ Montrons que $E$ est de dimension finie.
Comme $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cos)$ est une famille génératrice finie de $E$, $E$ est un espace vectoriel de dimension finie de dimension au plus 5.

$\ast$ Montrons que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cos)$ est une famille libre.
Soient $(\lambda_i)_{i \in [\![1,5]\!]} \in \mathbb{R}^5$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha(x) + \lambda_2 \beta(x) + \lambda_3 \gamma(x) + \lambda_4 \delta(x) + \lambda_5 \cos(x) = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 \cos(x) = 0. \end{aligned}$$

En divisant cette équation par $x^3$ puis en faisant tendre $x$ vers l'infini, on obtient $\lambda_4 = 0$.
En divisant cette équation par $x^2$ puis en faisant tendre $x$ vers l'infini, on obtient $\lambda_3 = 0$.
En divisant cette équation par $x$ puis en faisant tendre $x$ vers l'infini, on obtient $\lambda_2 = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \lambda_2 \cos(x) = 0$.
Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda_1 = 0$.
Pour $x = 0$, on obtient $\lambda_5 = 0$.

Finalement, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cos)$ est une base de $E$ et $E$ est un espace vectoriel de dimension 5.

**2.** Montrons que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

$\ast$ $(\cdot|\cdot)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\ast$ $(\cdot|\cdot)$ est symétrique car le produit est commutatif dans $\mathbb{R}$.

$\ast$ $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche par distributivité du produit par rapport à l'addition et la linéarité de l'intégrale.
La linéarité à droite est obtenue par symétrie.

$\ast$ $(\cdot|\cdot)$ est une forme positive par positivité de l'intégrale. En effet, pour tout $f \in E$,

$$\begin{aligned} (f|f) &= \int_0^\pi f(t) \cdot f(t)\, dt \\ &= \int_0^\pi f^2(t)\, dt \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

$\ast$ Montrons que $(\cdot|\cdot)$ est une forme définie. Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$. On a ainsi, $\displaystyle\int_0^\pi f^2(t)\, dt = 0$. Comme $f$ est une fonction continue, d'après la positivité de l'intégrale, $f^2(t) = 0$, pour tout $t \in [0, \pi]$. Montrons que $f$ est la fonction identiquement nulle.
Comme $f \in E$, il existe $a$, $b$, $c$, $d$, $e \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + e\cos(x)$.
Ainsi, pour tout $x \in [0, \pi]$, $a + bx + cx^2 + dx^3 + e\cos(x) = 0$. En dérivant 4 fois cette expression, on obtient, pour tout $x \in [0, \pi]$, $e\cos(x) = 0$, soit $e = 0$. Ensuite, on a $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Ce polynôme de degré 3 possède une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul et $a = b = c = d = 0$.
Finalement, on a bien montré que $f$ est la fonction identiquement nulle.

**3.** $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel et $\mathbb{R}_2[X] \subset E$ (on identifie polynômes et fonctions polynomiales), donc $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**4.** En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et en notant $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base ainsi obtenue, notons

$$\begin{aligned} g_0 &= \alpha, \\ g_1 &= \beta - \frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}\alpha, \\ g_2 &= \gamma - \frac{(g_2|g_1)}{(g_1|g_1)}g_1 - \frac{(g_2|g_0)}{(g_0|g_0)}g_0. \end{aligned}$$

Enfin,

$$f_0 = \frac{g_0}{(g_0|g_0)},\ f_1 = \frac{g_1}{(g_1|g_1)},\ f_2 = \frac{g_2}{(g_2|g_2)}.$$

Après calculs, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ f_1 = \sqrt{\frac{3}{\pi^3}}(2x - \pi),\ f_2(x) = \sqrt{\frac{5}{\pi^5}}(6x^2 - 6\pi x + \pi^2).$$

**5.** La fonction cos n'est pas une fonction polynomiale car elle n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie) en l'infini. On a alors, en notant $p$ la projection orthogonale de cos sur $\mathbb{R}_2[X]$,

$$p(\cos) = (\cos|f_0)\, f_0 + (\cos|f_1)\, f_1 + (\cos|f_2)\, f_2.$$

Après calculs, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p(\cos)(x) = -\frac{12}{\pi^3}(2x - \pi).$$

**6.** D'après la propriété de la distance, on a

$$\begin{aligned} d(\cos, \mathbb{R}_2[X])^2 &= (\cos - p(\cos)| \cos - p(\cos)) \\ &= \int_0^\pi \left(\cos(x) + \frac{12}{\pi^3}(2x - \pi)\right)^2 dx. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$d(\cos, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{\frac{\pi^4 - 96}{2\pi^3}}.$$

**7.** En utilisant les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^\pi (a + bx + cx^2 - \cos x)^2\, dx &= d(\cos, \mathbb{R}_2[X])^2 \\ &= \frac{\pi^4 - 96}{2\pi^3}. \end{aligned}$$

**8.** En utilisant les mêmes méthodes que précédemment, on obtient

$$p(\delta)(x) = \frac{\pi^3}{20} - \frac{3}{5}\pi^2 x + \frac{3}{2}\pi x^2,$$

puis,

$$d(\delta, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{\sqrt{7}}{140}\pi^{7/2}.$$

**9.** En calculant des valeurs approchées des quantités précédentes, on a

$$d(\delta, \mathbb{R}_2[X]) > d(\cos, \mathbb{R}_2[X]).$$

□