* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

* * *

Exercice 1. (Quelques Calculs)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+i)^7 = 2.$$

3. Soient a, b deux réels et n un entier naturel non nul. Calculer en fonction de $\mathrm{ch}(a)$ et $\mathrm{sh}(b)$ la quantité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(a + k\,b).$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\tan(3x) = \tan(x)\left(2 + \tan(x)\tan(3x)\right).$$

Exercice 2. (Lignes de niveau) On note $\mathcal{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient A, B deux points distincts du plan et k un réel strictement positif. On cherche les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

1. Déterminer la ligne de niveau correspondant à $k = 1$.

2. On suppose dans cette question que $k \neq 1$.

a) Montrer que le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, (B, k) appartient à la ligne de niveau k.

b) Montrer que la ligne de niveau $\{M \in \mathcal{P}\ ;\ \frac{MA}{MB} = k\}$ est un cercle (dont on ne précisera pas les éléments caractéristiques).

Exercice 3. On rappelle que $\log_a$ désigne la fonction logarithme de base a. On note f la fonction définie par $f(x) = \log_x(x+1)$.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

2. On commence par étudier les variations de la fonction f.

a) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

b) En déduire les variations de la fonction f (on précisera les valeurs limites de f aux bornes de son intervalle de définition).

3. Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(x) = \log_{x+1}(x).$$

a) Préciser son domaine de définition et étudier ses variations.

b) Déterminer les coordonnées des points communs des courbes représentatives de f et φ.

4. Rédoudre l'inéquation

$$\log_x(x+1) \geq \log_{x+1}(x).$$

Problème. (Inversions & Homographies) Dans ce problème, nous allons étudier les propriétés de certaines transformations du plan. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Les homographies

Soit $\mathcal{A} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4\ ;\ ad - bc \neq 0\}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note

$$h_A\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

L'application h_A est appelée *homographie*.

1. Étrude d'un cas particulier.

a) Montrer que l'application h qui à un nombre complexe z associe le nombre complexe $\frac{z-i}{z+i}$ est une homographie.

b) Soit z un nombre complexe de partie imaginaire positive. Montrer que $h(z)$ appartient au disque de rayon 1.

2. On s'intéresse à la structure de l'ensemble $\mathcal{H} = \{h_A,\ A \in \mathcal{A}\}$.

a) Soient A, $B \in \mathcal{A}$. Montrer qu'il existe un quadruplet $C \in \mathcal{A}$ tel que

$$h_A \circ h_B = h_C,$$

c'est-à-dire que pour tout nombre complexe z, $h_A(h_B(z)) = h_C(z)$.

b) Soit $A = (a, b, c, d) \in \mathcal{A}$. On note $B = \frac{1}{ad-bc}(d, -b, -c, a)$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$h_A\left(h_B(z)\right) = z.$$

c) En déduire la structure de l'ensemble $(\mathcal{H}, \circ)$ (Vous veillerez à bien justifier votre réponse).

3. Soit $A \in \mathcal{A}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h_A(z) = z$.

Partie B : Les inversions

On propose, dans cette partie, d'étudier les inversions. On note $\mathcal{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On rappelle que pour toute droite $\mathcal{D}$ munie d'un vecteur directeur normé $\overrightarrow{u}$, on appelle distance algébrique entre deux points A et B de $\mathcal{D}$ la quantité $\overline{AB}$ définie par $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\overrightarrow{u}$. On remarque que le produit de deux distances algébriques est indépendant de la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ choisi.

Soit λ un réel non nul. On considère l'application f_λ qui à tout point M du plan différent de l'origine O du repère associe le point M' de la droite (OM) tel que

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \lambda.$$

L'application f_λ est appelée *inversion de paramètre* λ.

4. Commençons par montrer quelques propriétés élémentaires des inversions.

a) Montrer que l'application f_λ est involutive, c'est-à-dire que pour tout point M du plan différent de l'origine O du repère, $f_\lambda\left(f_\lambda(M)\right) = M$.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $f_\lambda(M) = M$.

c) Soit M un point du plan différent de l'origine de coordonnées (x, y). On note (x', y') les coordonnées de l'image M' de M par l'inversion de rapport λ. Montrer que $(x', y') = (\frac{\lambda x}{x^2+y^2}, \frac{\lambda y}{x^2+y^2})$.

5. Soit R un réel strictement positif. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R.

a) Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

b) En déduire que l'image de $\mathcal{C}$ par l'application f_λ est un cercle centré en O.

6. Montrer que l'image par f_λ d'une droite passant par l'origine est une droite passant par l'origine.

7. Soit A un point du plan différent de l'origine. Montrer que f_λ transforme tout cercle de diamètre $[OA]$ en une droite ne passant pas par O et orthogonale à (OA).

8. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan ne passant pas par l'origine O et non centré en O. Montrer que l'image de $\mathcal{C}$ par f_λ est un cercle ne passant pas par O et non centré en O.

Partie C : Homographies & Inversions

9. Montrer que l'application $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ est l'inversion de rapport 1.

10. Écrire toute homographie comme une composée de similitudes et d'inversion.

11. En déduire que les homographies tansforment les droites ou cercles en droites ou cercles.