* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Attention, la durée est de 2 heures.

* * *

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^5-(z-i)^5=0$.

2. Soient E l'espace vectoriel de dimension 3 orienté et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{t}$ trois vecteurs de E. Rappeler la définition du déterminant de trois vecteurs puis montrer que

$$(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{t})=(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w})(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t})-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t})(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}).$$

3. Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$y'(x)+\tan(x)y(x)=\cos(x),\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

telle que $y(0)=1$.

4. Trouver les fonctions à valeurs réelles solutions de l'équation différentielle $y''(x)+y'(x)+3y(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 2. (Étude d'une équation cartésienne) On considère l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne

$$y^2-\sqrt{3}xy-2\sqrt{3}x+(4-3\sqrt{3})y+6-6\sqrt{3}=0.$$

1. De quel genre de conique s'agit-il ?

2. On considère le point O' de coordonnées cartésiennes $(-3,-2)$. Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O',\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est $(y')^2-\sqrt{3}x'y'+2=0$.

3. Soient $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$) le vecteur image de $\overrightarrow{i}$ (resp. $\overrightarrow{j}$) par la rotation d'angle $-\pi/3$. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O',\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

4. Déterminer les sommets de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O',\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ puis dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Exercice 3. (Étude d'une courbe paramétrique) On considère la courbe définie en coordonnées polaires par

$$r(\theta)=4\sin^2(\theta)\cos(\theta).$$

1. Étude de la courbe. On note Γ son support.

a) Montrer que l'intervalle d'étude peut successivement être réduit à $[-\pi/2,\pi/2]$ puis à $[0,\pi/2]$. Vous expliquerez comment obtenir le tracé définitif de Γ.

b) Tracer l'allure de la courbe Γ.

2. Soit $x\in]0,1[$. Montrer qu'il existe exactement 4 points distincts de Γ d'abscisse égale à x.

Problème. (Étude partielle des solutions de l'équation différentielle $y''+qy=0$) Soit q une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y''+qy=0$ toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, qui vérifie $y''(t) + q(t)y(t) = 0$, pour tout nombre réel t.

On admettra (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*) que, pour tous nombres réels t_0, y_0, y'_0, il existe une *unique* solution de (E) qui satisfait

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0.$$

On dit qu'une fonction est positive (resp. négative) si pour tout nombre réel t, $f(t) \geq 0$ (resp. $f(t) \leq 0$).

1. Soient y, z deux solutions de (E). Montrer que la fonction $yz' - y'z$ est constante.

(Cette fonction s'appelle le Wronskien du couple (y, z).)

2. On désigne par y_1 et y_2 les solutions de l'équation (E) qui satisfont

$$\begin{aligned} y_1(0) = 1 \quad &, \quad y'_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0 \quad &, \quad y'_2(0) = 1. \end{aligned}$$

a) Calculer la valeur de $y_1y'_2 - y_2y'_1$.

b) Les fonctions y_1 et y_2 peuvent elles avoir un zéro commun, c'est-à-dire, existe-t-il un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$?

c) Montrer que z est une solution de (E) si et seulement si il existe deux constantes réelles λ, μ telles que $z = \lambda y_1 + \mu y_2$.

(On pourra montrer, en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, que toute solution z de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $z = z(0)y_1 + z'(0)y_2$.)

d) Montrer que si z est solution de l'équation différentielle, le couple (λ, μ) défini à la question précédente est unique.

3. Montrer que si q est une fonction paire, la fonction y_1 est paire et la fonction y_2 est impaire.