* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

* * *

Exercice 1.
1. Soient E, F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications. On suppose que $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ est injective. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Soit $A \subset G$. Rappeler la définition de $g^{-1}(A)$. En déduire que $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$.
3. Donner un équivalent simple de la suite $\left(\frac{-1+20^{1/n}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. En déduire la limite de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par

$$u_n = \left(\frac{1+20^{1/n}}{2}\right)^n.$$

4. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ par

$$X \,\mathcal{R}\, Y \;\Leftrightarrow\; ((\forall\, x \in X,\, y \in Y,\, x \leq y) \text{ OU } (X = Y)).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Exercice 2. Soit I un ensemble. Soient $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$, deux familles bornées de réels.
1. Montrer que pour tout $i \in I$, $a_i \leq b_i + |a_i - b_i|$.
2. En déduire, en justifiant rigoureusement l'existence de chacune de ces bornes supérieures, que

$$\left|\sup_{i\in I} a_i - \sup_{i\in I} b_i\right| \leq \sup_{i\in I} |a_i - b_i|.$$

Problème. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}.$$

Partie A : Étude d'une limite

1. On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{E}$ définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.
a) Écrire une fonction `beta(n)` en langage `Python` qui prend en argument un entier n et qui renvoie le n-eme terme de la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) En déduire qu'elles tendent vers $+\infty$.
d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
e) Montrer que les deux suites $\left(\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.
f) Que peut-on dire de la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?
2. Comparaison asymptotique des suites.

a) Montrer que pour tout entier n non nul, $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \ell\right| \leq \frac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.

b) Écrire une fonction seuil(M) en langage Python qui prend en argument un réel strictement positif et renvoie le rang n_0 à partir duquel $|\alpha_n/\beta_n - \ell| \leq M$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n - \ell\beta_n)$.

d) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n - \mu\beta_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.

3. Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de $\mathcal{E}$.

a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que

$$u_0 = \lambda\alpha_0 - \lambda'\beta_0 \text{ et } u_1 = \lambda\alpha_1 - \lambda'\beta_1.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha_n - \lambda'\beta_n$.

c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

Partie B : Calcul de cette limite

Rappelons que si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors (formule d'intégration par parties) pour tous a, $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = u(b)v(b) - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction φ_n pour tout réel t par $\varphi_n(t) = \frac{t^n(t-1)^n}{n!}$.

4. Établir que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi''_{n+1}(t) = (4n+2)\varphi_n(t) + \varphi_{n-1}(t)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \varphi_n(t)e^{-t}\,dt$.

a) Calculer J_0 et J_1.

b) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{E}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

d) En déduire que $\ell = \frac{3-e}{e-1}$.