* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

* * *

Exercice 1.
1. Calculer la limite de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \left(\text{ch}\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
2. Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite u de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt[8]{1+\frac{1}{2^n}} - 2e^{\sin\frac{1}{n}} + \cos\frac{2}{n}}{\tan\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}}.$$

En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}}$.
1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?
3. Donner l'équation de la tangente à f en 0.
4. Préciser la postion relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 3. Étant donné un entier $n \geq 1$ et un nombre premier p, on appelle valuation p-adique de n l'entier noté $v_p(n)$ égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.
Soit un entier $n \geq 2$ et un nombre premier p. Pour tout $k \geq 0$, on considère les sous-ensembles finis U_k, V_k et Ω_k de $\mathbb{N}$ définis par

$$\begin{aligned} U_k &= \{a \in [|1,n|]\ ;\ p^k \text{ divise } a\}, \\ V_k &= \{a \in [|1,n|]\ ;\ p^k \text{ ne divise pas } a\}, \\ \Omega_k &= \{a \in [|1,n|]\ ;\ v_p(a) = k\}. \end{aligned}$$

1. Montrer qu'il existe un plus petit entier $k_0 \geq 0$ tel que $p^{k_0} > n$. Montrer que $k_0 \geq 1$ et expliciter k_0 en fonction de p et n.
2.
a) Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, U_{k+1} est strictement inclus dans U_k et que pour $k \geq k_0$, $U_k = \emptyset$.
b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$, V_k est strictement inclus dans V_{k+1} et que pour $k \geq k_0$, $V_k = [|1,n|]$.
c) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k = [|1,n|]$, où l'union est disjointe. On dit que la famille de parties $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1}\}$ forme une partition de $[|1,n|]$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$.
b) Calculer $|U_k|$, $|V_k|$ et $|\Omega_k|$ en fonction de n et p.

c) Aboutissement rajouté pour le corrigé. Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k=0}^n k \cdot |\Omega_k|$ et en déduire la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

Problème. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérés de f par $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \mathrm{Im}\, f^n$ et $G_n = \mathrm{Ker}\, f^n$.

Exemples et Contre-exemples

1. Étude d'une application linéaire.
Soit $g\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $g((x, y, z)) = (x - y, x - y, 0)$.
a) Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$. g L'endomorphisme g est-il surjectif ? injectif ?
c) Déterminer g^2 et en déduire $\mathrm{Ker}\, g^2$ et $\mathrm{Im}\, g^2$.

2. Montrer que les propositions suivantes sont fausses.
a) $\forall\ f \in \mathcal{L}(E)$, $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f$.
b) $\forall\ f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.
c) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, si $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$, alors f est un projecteur de E.

Noyaux et Images

Dans toute la suite, f désigne un endomorphisme de E.
3. Montrer les équivalences suivantes.
a) $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
b) $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

4. Soient i, j deux entiers naturels. Montrer les équivalences suivantes.
a) $E = \mathrm{Ker}\, f^i + \mathrm{Im}\, f \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}\, f^i = \mathrm{Im}\, f^{i+1}$.
b) $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f^j = \{0\} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}\, f^j = \mathrm{Ker}\, f^{j+1}$.

Étude des suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. On s'intéresse aux suites d'espaces vectoriels $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
a) Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.
b) Montrer que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.
6. On suppose qu'il existe deux entiers p, q tels que $F_p = F_{p+1}$ et $G_q = G_{q+1}$. Soient $i = \min\{n \in \mathbb{N}\ ;\ F_n = F_{n+1}\}$ et $j = \min\{n \in \mathbb{N}\ ;\ G_n = G_{n+1}\}$.
a) Montrer que i et j sont bien définis.
b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq p$, $F_n = F_p$.
c) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq q$, $G_n = G_q$.
d) Prouver que $i = j$ et que $E = F_i \oplus G_i$.