Devoir Surveillé

* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

* * *

Exercice 1. (Quelques calculs)
1. Déterminer, si elle existe, la limite lorsque x tend vers 1 de la fonction $x \mapsto \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$.
2. Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P = X^6 - 1$.
3. Identifier le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme $A = iX^5 - 4X^2 + 3i$ par le polynôme $B = X^2 + iX + 1$.

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un zéro de f si et seulement si $f(x) = 0$. Soit n un entier non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction possédant n zéros distincts notés $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[x_1, x_n]$. Montrer que f' possède au moins $n-1$ zéros distincts dans $]x_1, x_n[$. L'hypothèse *f de classe $\mathcal{C}^1$* est-elle optimale ?
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur l'intervalle $[x_1, x_n]$. Montrer que $f^{(n-1)}$ possède au moins un zéro dans $]x_1, x_n[$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[x_1, x_n]$. Soit $a \in [x_1, x_n]$. Montrer qu'il existe $\lambda \in]x_1, x_n[$ tel que

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (a - x_i).$$

On pourra considérer la fonction $\varphi(x) = f(x) - K(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, où K est une constante que l'on choisira judicieusement.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{N}$. On définit le polynôme $P_a = X^3 - (a^2 + 2a)X + 2$. Le but de cet exercice est de savoir pour quel(s) entier(s) a le polynôme P_a admet trois racines entières (comptées avec leur multiplicité).
On suppose qu'il existe un entier a et trois entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ racines de P_a. On suppose que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
1. Étude des propriétés des entiers x_1, x_2, x_3.
- **a)** Exprimer les quantités $x_1 + x_2 + x_3$ et $x_1 x_2 x_3$ en fonction de a.
- **b)** Calculer $P_a(0)$ puis la limite de P_a en $-\infty$. En déduire que $x_1 < 0$.
- **c)** Montrer que $0 \leq x_2 \leq x_3 \leq -x_1$.

2. Étude de l'entier a.
- **a)** Déduire des questions précédentes les valeurs de x_1, x_2 et x_3.
- **b)** Montrer que $P_a'(x_2) = 0$.
- **c)** En déduire la ou les valeurs possibles de a.

3. Conclure sur le problème posé.

Problème. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et $f(0) = 1$.

Étude de fonction

1. Étude de la régularité de la fonction f.
- **a)** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, calculer $f'(x)$.
- **b)** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

2. Comportement de la fonction f.

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies.

b) Dresser le tableau des variations de f.

Développements limités

Soit n un entier naturel non nul.

3. Déterminer le développement limité de $\frac{e^x-1}{x}$ à l'ordre n en 0.

4. En déduire (sans le calculer) que f admet un développement limité d'ordre n en 0.

On notera dans toute la suite $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité.

5. Déterminer le développement limité de f à l'odre 3 en 0. En déduire b_0, b_1, b_2, b_3.

6. Une relation de récurrence sur les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) En remarquant que $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

b) En déduire une formule de récurrence permettant le calcul de b_n.

c) Écrire une procédure `bernoulli(n)` qui prend comme argument un entier naturel `n` et calcule $b_{\mathtt{n}}$.

Étude de polynômes

Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$. B_n est appelé le n-ème polynôme de Bernoulli. On utilisera des notations identiques pour polynômes et fonctions polynomiales associées.

7. Déterminer B_0, B_1, B_2.

8. Soit $n \geq 2$. Montrer les égalités suivantes.

a) $B_n(0) = B_n(1)$.

b) $B_n'(X) = nB_{n-1}(X)$.

c) $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$.

9. Pour tout $n \geq 0$, posons $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

a) Montrer que $Q_0(X) = B_0(X)$.

b) Pour tout $n \geq 2$, calculer $Q_n'(X)$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $Q_n(X) = B_n(X)$.

d) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $b_{2n+1} = 0$.