* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

* * *

Exercice 1. Le plan usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 = 1$.

Étude de $\mathcal{H}$

1. Préciser les coordonnées des sommets A et A' de l'hyperbole $\mathcal{H}$ où A désigne le sommet d'abscisse positive et A' celui d'abscisse négative.
2. Déterminer l'excentricité e de $\mathcal{H}$.

Une loi de composition interne sur le plan

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'une loi de composition interne notée $*$ qui aux points M et M' de coordonnées cartésiennes respectives (x, y) et (x', y') associe le point $N = M * M'$ de coordonnées (α, β) avec

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha & = & xx' + 3yy' \\ \beta & = & xy' + yx'\end{array}\right.$$

3. Montrer que la loi $*$ est associative, commutative et qu'elle possède un élément neutre qu'on précisera.
4. On considère l'application $F : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ qui à un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) associe $F(M) = x^2 - 3y^2$. Décrire les lignes de niveau $E_0 = \{M \in \mathcal{P} \ ; \ F(M) = 0\}$ et $E_1 = \{M \in \mathcal{P} \ ; \ F(M) = 1\}$.
5. Montrer que

$$\forall\ (M, M') \in \mathcal{P}^2,\ F(M * M') = F(M)F(M').$$

En déduire que si M et M' appartiennent à $\mathcal{H}$ alors $M * M'$ appartient à $\mathcal{H}$.

Structure de groupe sur $\mathcal{H}$

6. Montrer $(\mathcal{H}, *)$ est un groupe commutatif et que l'inverse d'un point M de $\mathcal{H}$ pour la loi $*$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).
7. On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble formé par les points de $\mathcal{H}$ d'abscisses strictement positives et $\mathcal{H}^- = \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}^+$.
  a) $\mathcal{H}^+$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{H}$?
  b) $\mathcal{H}^-$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{H}$?

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoiel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots f}_{k \text{ fois}}$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. En outre, si $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, p est appelé l'indice de nilpotence de f.
1. On note D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (l'espace des polynômes à une indéterminée de degré inférieur ou égal à $n-1$). Montrer que D est un endomorphisme nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.
2. Soit f un endomorphisme nilpotent d'indice p.
  a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$.
  b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.
  c) En déduire que $p \leq n$.
  d) Écrire la matrice de la restriction de f à $\operatorname{Im}(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^k(x) = 0_E$.

a) Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.

b) Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus E de dimension finie.

4. Soient f, g deux endomorphismes nilpotents de E qui commutent. Montrer que $f \circ g$ et $f + g$ sont aussi nilpotents.

Problème. L'objet de ce problème est de résoudre dans certains cas particuliers l'équation fonctionnelle

$$f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = g(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

où f est une fonction inconnue supposée continue sur $\mathbb{R}$ et g est une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$.

On suppose dans cette partie que la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions solutions de (1) sont deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle

$$f''(x) - f(x) = g''(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$.

2. En déduire les solutions de l'équation (1) lorsque

a) g est la fonction nulle,

b) g est une constante,

c) g est un polynôme de degré 1.

3. Soient k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g'(t)\,dt + k_1\right] + \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{t}g'(t)\,dt + k_2\right]$$

est solution de l'équation (2).

Déterminer k_1 et k_2 pour que f soit solution de (1).

4. Résoudre l'équation (1) lorsque g est la fonction exponentielle.

Dans cette partie, on suppose que la fonction g est seulement continue.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

5. Montrer que l'équation (1) possède au plus une solution (on pensera à utiliser les résultats de la partie précédente).

6. On définit l'application A qui à une fonction f de $\mathcal{C}$ associe la fonction $A(f)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Montrer que l'application A est une application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ injective.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n l'itérée n-ème de A, i.e.

$$A_2(f) = A(A(f)), \dots, A_n(f) = A(A_{n-1}(f)).$$

a) À l'aide d'intégrations par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_2(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f(t)\,dt$.

b) En déduire l'expression de $A_n(f)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = A + A_2 + \cdots + A_n$ et U l'application qui à toute fonction f de $\mathcal{C}$ associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$U(f)(x) = \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)f(t)\,dt.$$

d) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\left| \mathrm{sh}(u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \leq \frac{\mathrm{ch}(u)|u|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

e) En déduire que pour tout réel x,

$$|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \leq \frac{\mathrm{ch}(x)|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \int_0^x |f(t)| \, dt \right|.$$

f) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}$ et pour tout réel x,

$$(U \circ A)(f)(x) = (A \circ U)(f)(x) = (U - A)(f)(x).$$

8. Soit Id la fonction identité sur $\mathcal{C}$.

a) Montrer que les applications $\mathrm{Id} - A$ et $\mathrm{Id} + U$ sont des applications bijectives de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, réciproques l'une de l'autre.

b) En déduire la solution de l'équation (1).

9. Expliciter f lorsque la fonction g est paire et telle que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$