* * *

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction et à la présentation.

* * *

Exercice 1. (Tracé d'une courbe paramétrique)
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe Γ représentée paramétriquement par

$$\begin{cases} x(t) = t - \text{th}(t) \\ y(t) = \frac{1}{\text{ch}(t)} \end{cases}.$$

1. Démontrer que Γ admet un axe de symétrie.
2. Étudier les branches infinies de Γ.
3. Étudier les variations de x et y ; dresser un tableau des variations.
4. Préciser la nature du point A d'abscisse 0, ainsi que la tangente en ce point.
5. Donner l'allure de la courbe Γ.
6. Une propriété des tangentes.
a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point M de paramètre t.
b) Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point N. Calculer la distance MN.

Exercice 2. Soient a, b, c trois nombres réels. On note $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ -1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ canoniquement associée à A.
1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que f ne soit pas injective.
2. On suppose dans cette question que $b = 1$ et on considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis dans la base canonique par $v_1 = (1, 0, 1, -1)$, $v_2 = (-1, 1, -1, 0)$ et $v_3 = (0, a, 1, c)$. Soit $F = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et $Y \in \mathbb{R}^4$.
a) Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
b) Soit $Y \in \mathbb{R}^4$. Montrer que $Y \in F$ si et seulement si $\det(v_1, v_2, v_3, Y) = 0$.
c) En déduire une équation cartésienne de F.
d) Montrer que l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admet au plus une solution.
e) Notons $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ les coordonnées de Y dans $\mathbb{R}^4$. Montrer que l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admet une unique solution si $(a + 1 + c)\alpha + \beta - (a + c)\gamma + \delta = 0$
3. Dans cette question, on suppose que la condition de non-injectivité de f est satisfaite.
a) Déterminer une base de $\text{Im}\, f$ et de $\text{Ker}\, f$.
b) Trouver la forme générale des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0_{\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})}$.

Problème. (Exemples d'ensembles de matrices idempotentes)

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On considère n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

Le but de ce problème est l'étude des ensembles

$$\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ A^p = I_n\} .$$

Dans la deuxième et la troisième partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et Id_E désigne l'identité de E.

Partie I - Généralités

1. $\mathcal{R}_n(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.

3. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.

4. Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

5. On considère q un entier naturel supérieur ou égal à 2, et on appelle d le plus grand diviseur commun de p et q. Montrer que

$$\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n(d).$$

Partie II - Étude de $\mathcal{R}_2(2)$

6. Soit A un élément de $\mathcal{R}_2(2)$ tel que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) = E$.

b) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $ad - bc \neq 0$ et

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix}.$$

7. Montrer que $\mathcal{R}_2(2)$ muni de la multiplication des matrices n'est pas un groupe. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie III - Étude de $\mathcal{R}_2(3)$

Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $\mathcal{R}_2(3)$, et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M. On considère les sous-espaces vectoriels de E

$$F = \mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{Id}_E) \text{ et } G = \mathrm{Ker}\,(v^2 + v + \mathrm{Id}_E),$$

où $v^2 = v \circ v$.

8. On veut montrer que $E = F \oplus G$.

a) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.

b) Soit $x \in E$. Montrer que $\frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right) \in F$ et que $\frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right) \in G$.

c) Conclure.

9. Que peut-on dire de M si F est de dimension 2 ?

10. Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que F est de dimension 1.

a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ de E telle que F soit la droite vectorielle engendrée par g_1 et G soit la droite vectorielle engendrée par g_2.

b) En considérant le vecteur $v^2(g_2) + v(g_2) + g_2$, obtenir une contradiction.

11. On suppose dans cette question que F est de dimension 0.

a) Montrer que $(e_1, v(e_1))$ est une base de E.

b) En déduire qu'il existe un réel a et un réel non nul b tels que

$$M = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix}.$$

A. Camanes