■ ■ ■

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

I - Propriétés de l'espérance

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1}{2}$. Déterminer

1. $\mathbb{P}(|X| = 1)$.

2. $\mathbb{P}(X^2 - 3X + 2 = 0)$.

3. $\mathbb{E}\left[\frac{X}{2+X}\right]$.

4. la loi de $Y = \frac{X+1}{2}$.

Exercice 2. Soient A et B deux événements. On veut montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant 1/4$.

1. Soit Z une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 2.

a) Montrer que $\mathbb{E}[(Z-a)^2] = \mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}[Z] - a)^2$.

b) En déduire que si $Z(\Omega) \subset [0,1]$, alors $\mathbb{V}(Z) \leqslant 1/4$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$.

a) En considérant la variance de $Z = \frac{X-Y}{2}$, montrer que $\mathscr{C}ov\,(X,Y) \leqslant 1/4$.

b) On pose $\widetilde{Y} = 1 - Y$. Exprimer $\mathscr{C}ov\left(X, \widetilde{Y}\right)$ en fonction de $\mathscr{C}ov\,(X,Y)$.

c) En déduire que $|\mathscr{C}ov\,(X,Y)| \leqslant 1/4$.

3. Conclure. Cette borne est-elle optimale ?

Exercice 3. (Indépendance mutuelle) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant chacune les valeurs $\{-1, 1\}$ avec probabilité $1/2$ et $Z = XY$. Montrer que X, Y et Z sont indépendantes 2 à 2 mais pas dans leur ensemble.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble fini. Montrer que l'ensemble des variables aléatoires réelles sur Ω est un espace vectoriel et en déterminer une base.

Exercice 5. (Distance en variation totale) Pour toutes variables aléatoires X et Y à valeurs dans $[\![0, N]\!]$, on note

$$d(X,Y) = \sum_{k=0}^{N} |\mathbb{P}(X=k) - \mathbb{P}(Y=k)|.$$

1. Montrer que d est symétrique et satisfait l'inégalité triangulaire.

2. Montrer que $d(X,Y) = 0$ si et seulement si X et Y ont même loi.

3. Montrer que $d(X,Y) = 2 \sup_{A \subset [\![0,N]\!]} |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$.

4. Soient $X, X_1, \ldots,$ des variables aléatoires. Montrer qu'il y a équivalence entre

(i). $d(X_n, X) \to 0$.

(ii). $\forall\, A \subset [\![0,N]\!]$, $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$.

(iii). $\forall\, x \in [\![0,N]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X = x)$.

Si une de ces conditions est satisfaite, (X_n) converge en loi vers X.

Exercice 6. Soient $(X_1, \dots, X_m)$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que X à valeurs dans $[\![0, p]\!]$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \sum\limits_{n=1}^{p} \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

2. En notant $(p_k)_{k \in [\![0,p]\!]}$ la loi de X et $r_n = \sum\limits_{k=n}^{p} p_k$. Montrer que $\mathbb{E}[\min(X_1, \dots, X_m)] = \sum\limits_{n=1}^{p} r_n^m$.

Exercice 7. Soit $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de moyenne p. On note $Y_n = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de Y.

II - Pièces, Boules,...

Exercice 8. Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. Un *essai* consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne. Lors d'un essai, un joueur gagne 1 point s'il a obtenu au moins 2 boules rouges.

1. Calculer la probabilité p d'obtenir 1 point au cours d'un essai.

2. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges obtenues au cours d'un essai.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$ et sa variance $\mathbb{V}(X)$.

3. Une partie comporte 7 essais successifs en remettant dans l'urne après chaque essai les boules tirées. On désigne par Z la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus au cours d'une partie.

a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

b) Pour quelle valeur de k la probabilité $\mathbb{P}(Z = k)$ est-elle maximale ?

4. L'urne contient maintenant n boules blanches et $2n$ boules rouges, chacune des boules ayant la même probabilité d'être tirée.

a) Calculer la probabilité p_n d'obtenir exactement une boule blanche au cours d'un essai. Déterminer la limite de la suite (p_n).

b) Calculer la probabilité q_n d'obtenir au moins une boule blanche au cours d'un essai. Déterminer la limite de la suite (q_n).

Exercice 9. On considère n boules numérotées que l'on tire avec remise. On note X le rang auquel on obtient pour la première fois une boule déjà obtenue précédemment.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = n + 1)$.

2. Montrer que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}(X > i | X > i - 1) = \frac{n-(i-1)}{n}$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(X > k) = \prod\limits_{i=2}^{k} \mathbb{P}(X > i | X > i - 1)$.

4. En déduire que $\mathbb{P}(X > k) = \frac{A_n^k}{n^k}$ puis déterminer la loi de X.

Exercice 10. (Surbooking) Les compagnies aériennes pensent qu'un passager annule son vol avec probabilité 1/10, indépendamment du comportement des autres passagers. La compagnie I vend toujours 10 billets pour son avion de 9 places alors que la compagnie II vend toujours 20 billets pour son avion de 18 places. Quelle est la compagnie qui a le plus de chances d'être en surréservation ?

Exercice 11. (Pièces transitives) Trois pièces de monnaies sont biaisées de telle manière qu'obtenir face vaille $3/5$. La première pièce rapporte 10 points pour face et 2 pour pile, la deuxième 4 points pour face et 4 pour pile, la troisième rapporte 3 points pour face et 20 pour pile.
Vous et votre concurrent choisissez chacun une pièce différente. Vous lancez la pièce et celui qui obtient le plus grand nombre de points remporte le prix. Préférez-vous choisir la pièce en premier ou en second ?
Dans le même genre de jeu, on pourra s'intéresser aux dés d'Efron.

Exercice 12. (Double lancer) On lance indépendamment n pièces dont la probabilité d'obtenir face est p. Chaque pièce renvoyant face est relancée. Quelle est la loi du nombre de faces obtenues lors de ce deuxième lancer.

Exercice 13. (Loi conditionnelle) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$. Sachant que le plus petit de ces nombres est inférieur à 3, quelle est la probabilité que le plus grand soit supérieur à 5 ?

Exercice 14. Une pièce biaisée dont face apparaît avec probabilité p est lancée n fois. Une *excursion* est une série de lancers qui renvoient le même résultat. Par exemple, dans la séquence FFPFFPPF, il y a 5 excursions. On note R le nombre d'excursions. Montrer que $\mathbb{E}[R] = 1 + 2(n-1)p(1-p)$. Déterminer sa variance.
Exprimer R en fonction de I_j : le $(j+1)$-ème lancer est différent du j-ème.

Exercice 15. (Loi Trapézoïdale) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi uniforme sur $[\![0, m]\!]$ et Y suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 16. (Loi du plus petit numéro) Soient m et n deux entiers naturels strictement positifs tels que $m \leqslant n$. Une urne contient n boules numérotées $1, \dots, n$. On tire sans remise m boules et on cherche la loi du plus petit numéro obtenu. On note ainsi X_k le numéro de la boule tirée lors du k-ème tirage et $Y_m = \min\{X_k,\ k \in [\![1, m]\!]\}$. On note Ω l'ensemble des tirages possibles.

1. Montrer que, pour tout ω, $\{X_k(\omega),\ k \in [\![1, m]\!]\}$ est une partie de $[\![1, n]\!]$ à m éléments.

2. En déduire que $\mathbb{P}(Y_m > k) = \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}}$.

3. En déduire $\mathbb{E}[Y_m]$.

4. Reprendre la question **2.** lors de tirages avec remise.

III - Sujets de réflexion

Exercice 17. (Bibliothèque) On souhaite placer n livres $B_1, \dots, B_n$ sur une étagère de telle manière que le temps T moyen passé à chercher un livre de la gauche vers la droite soit minimal. On suppose que la probabilité qu'un lecteur cherche le livre i vaut p_i. Déterminer le classement des livres tel que $\mathbb{P}(T \geqslant k)$ soit minimal pour tout k.

Exercice 18. (Paradoxe de Peppy) Sam lance $6n$ dés une fois. Il doit recueillir au moins n six. Isaac lance $6(n+1)$ dés une fois. Il doit recueillir au moins $(n+1)$ six. Qui a le plus de chances de gagner ?

Exercice 19. (Méthode probabiliste) 17 piquets de clôture sont disposés autour d'un champ. Exactement 5 d'entre eux sont pourris. On numérote les 17 piquets et on note X_k l'indicatrice de l'événement *le piquet k est pourri*. On note $R_k = \sum_{j=1}^{7} X_{k+j}$, où les indices sont calculés modulo 17. On choisit ensuite aléatoirement un piquet K de loi uniforme sur $[\![0, 16]\!]$.

1. Calculer $\mathbb{E}[R_K]$.

2. En déduire que $\mathbb{P}(R_K \geqslant 3) > 0$.

3. En déduire qu'il existe une succession de 7 piquets dont au moins 3 sont pourris.

IV - Inégalités

Exercice 20. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de moyenne p et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

1. Montrer que $\mathbb{E}[(S_n - np)^4] = 3p^2q^2n(n-1) + npq(p^3 + q^3)$.

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n^2\varepsilon^4}.$$

Cette inégalité permet d'utiliser le lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 21. (Inégalité de Gibbs) Soient $k \in \mathbb{N}^\star$, $(p_1, \dots, p_k)$ et $(q_1, \dots, q_k)$ deux distributions de probabilités sur $[\![1, k]\!]$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i \cdot q_i > 0$.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\ln x \leqslant x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

2. En déduire que $\sum_{i=1}^{k} p_i \ln p_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} p_i \ln q_i$ et discuter le cas d'égalité.

Exercice 22. (Inégalité de Hoeffding) Soient $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on souhaite montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geqslant t) \leqslant 2e^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

1. Montrer que pour réel λ, $\cosh\lambda \leqslant e^{\frac{\lambda^2}{2}}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\mathbb{P}(S_n \geqslant t) \leqslant \frac{(\cosh\lambda)^n}{e^{\lambda t}}.$$

3. Conclure.
Cette égalité reste valable, en utilisant de la convexité, lorsque les variables aléatoires sont à valeurs dans $[-1, 1]$.

Exercice 23. (Inégalité de Paley-Zygmund) Soit Z une variable aléatoire à valeurs positives et $\theta \in]0, 1[$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\mathbb{P}(Z \geqslant \theta\mathbb{E}[Z]) \geqslant (1-\theta)^2 \frac{\mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z^2]}.$$

V - Pour aller plus loin...

Exercice 24. (Fonction de répartition, min **&** max**)** Soit F une fonction de répartition et r un entier positif. Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition.

1. F^r.

2. $1 - (1-F)^r$.

Exercice 25. (Médiane) Un réel m est une médiane de la fonction de répartition F si $\lim_{y \uparrow m} F(y) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant F(m)$. Montrer que toute variable aléatoire réelle possède une médiane.

Exercice 26. (Égalité de Wald) Soit N un entier naturel non nul.

1. Soient T, $X_1, \ldots, X_N$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Les (X_i) sont identiquement distribuées et leur fonction génératrice commune est g_X. La fonction génératrice de T est g_T. Déterminer la fonction génératrice de g_S, où $S = \sum_{k=1}^{T} X_k$.

2. En déduire que $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[T]$.

3. Dans un poulailler contenant N poules, on sélectionne et préserve un nombre aléatoire T de poules suivant une loi uniforme. Chacune de ces poules pond, chaque jour, un œuf unique avec probabilité p. Quel est le nombre moyen d'œufs que nous pourrons ramasser ?