Équations différentielles

Équations fonctionnelles

■ ■ ■

Exercice 1. (Une première équation fonctionnelle) Soit f une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable telle que pour tous réels x et y,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

1. On commence par étudier la fonction f.

a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

b) Montrer que si $f(0)=0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.

c) Montrer que f est paire et que $f'(0)=0$.

2. Montrer que pour tous réels x, y,

$$f''(x)f(y)=f(x)f''(y).$$

3. En déduire que f est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant l'équation fonctionnelle.

Exercice 2. (Une deuxième équation fonctionnelle) On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy)=xf(y)+yf(x).$$

Dans toute la suite, f désigne une fonction de $\mathscr{E}$.

1 . a) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

b) Démontrer que la fonction f est impaire.

2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$xf'(x)-f(x)=kx,$$

où k est une constante réelle dépendant de f que l'on précisera.

b) Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle précédente.

c) En déduire, en fonction de la constante k, la valeur de $f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

d) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

e) En supposant que $f'(1)=1$, donner l'allure du graphe de f_1 dans un repère orthonormal direct.

3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0.

a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$F(xy)=x^2F(y)+\frac{xy^2}{2}f(x).$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.