# Probablités

Pièces, Dés, Urnes, Cartes,...

■ ■ ■

## I - Dénombrement

**Exercice 1. (Tasses & Soucoupes, ✎)** Six tasses et soucoupes sont appareillées : deux sont de couleur rouge, 2 sont de couleur blanche et 2 sont de couleur noire. Les soucoupes sont alignées et les tasses sont placées aléatoirement sur les soucoupes, quelle est la probabilité qu'aucune des tasses ne soit sur une soucoupe de la même couleur.

**Exercice 2. (Lancer d'une pièce équilibrée, ✍)** Une pièce équilibrée est lancée $n$ fois. Quelle est la probabilité que lors du $n$-ème lancer...

**1.** ...face apparaisse pour la première fois ?

**2.** ...exactement deux faces soient apparues depuis le début ?

**3.** ...au moins deux faces soient apparues depuis le début ?

**4.** ...le nombre de faces et le nombre de piles cumulées jusqu'au dernier lancer soient égaux ?

**Exercice 3. (Système aléatoire, ✍)** On considère le système linéaire

$$\begin{cases} ax + y = 4 \\ bx + y = c \end{cases}.$$

On suppose que $a$, $b$, $c$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$. Quelle est la probabilité que le système...

**1.** ...ait une unique solution.

**2.** ...ait pour unique solution le couple $(1, 2)$.

**3.** ...ait une infinité de solutions.

**Exercice 4. (Quelle est la taille du paquet ?)** Un paquet de 10 cartes numérotées de 1 à 10 est mélangé. Trois cartes sont extraites tour à tour du paquet. Quelle est la probabilité que ces trois cartes soient triées par ordre croissant ?

## II - Conditionnement

**Exercice 5. (Loi de succession de Laplace)** Soient $N+1$ urnes numérotées de 0 à $N$. L'urne numéro $k$ contient $k$ boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité $p_N(n)$ que la $(n+1)$-ème boule tirée soit blanche sachant que les $n$ précédentes l'étaient toutes ?

**2.** Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} p_N(n)$.

**Exercice 6. (✍)** 50 boules noires et 50 boules blanches sont réparties dans 2 urnes. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Est-ce que la probabilité que cette boule soit blanche dépend de la répartition initiale dans les urnes ? Reprendre cette question si les deux urnes contiennent le même nombre de boules.

**Exercice 7. (✍)** Professeur $I$ lance une pièce équilibrée. Professeur $II$ lance deux pièces équilibrées. Quelle est la probabilité que Professeur $II$ obtienne strictement plus de faces que le Professeur $I$ ?

**Exercice 8. (Perte d'information)** Soient $A_1, \dots, A_n$ des individus qui se transmettent une information du type `vrai` ou `faux`. Chaque individu $A_k$ transmet l'information qu'il a reçue avec probabilité $p$ à l'individu $A_{k+1}$ et l'information inverse avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité $p_n$ pour que l'information reçue par $A_n$ soit identique à celle émise par $A_1$ ? En déduire, si elle existe, la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 9. (Jeu de cartes)** Soient 2 jeux de cartes, un de 32 cartes et un de 52 cartes. On prend un des jeux au hasard et on prend une carte dedans. On obtient une dame. Quelle est la probabilité que le jeu choisi contienne 32 cartes ?

**Exercice 10.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère une urne contenant $n$ boules noires et $n$ boules blanches. On effectue $n$ tirages sans remise. À chacun de ces tirages, on tire simultanément 2 boules. On note $A$ l'événement *chacun des tirages est constitué de* 2 *boules de couleurs différentes* et $A_k$ l'événement *le $k$-ème tirage est constitué de* 2 *boules de couleurs différentes.*

**1.** Déterminer $\mathbb{P}(A_1)$.

**2.** Montrer que
$$\mathbb{P}\left(A_k \Big| \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \frac{n-k+1}{2(n-k+1)-1}.$$

**3.** Exprimer $A$ en fonction des $(A_k)$.

**4.** En déduire que
$$p_n = \mathbb{P}(A) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!},$$
puis un équivalent de $p_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

## III - Indépendance

**Exercice 11. (Lancer de pièces, ✍)** Deux personnes lancent $n$ fois une pièce non truquée. Calculer la probabilité qu'elles obtiennent le même nombre de piles.

**Exercice 12. (Somme de deux dés)** On lance deux dés équilibrés. Montrer que, pour tout entier $i$ compris entre 1 et 6, l'événement *leur somme vaut* 7 est indépendant de l'événement *le premier des dés renvoie $i$.*

**Exercice 13. (Indépendance mutuelle)** On lance un dé $n$ fois. Soit $A_{i,j}$ l'événement le $i$-ème et le $j$-ème lancers tombent sur le même nombre. Montrer que les événements $(A_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ sont indépendants 2 à 2 mais pas mutuellement indépendants.

## IV - Plus élaborés

**Exercice 14. (Les limites du pipage, ➳)**

**1.** Est-il possible de truquer 2 dés de telle manière que les probabilités d'occurrence de chacune des sommes possibles obtenues lors d'un lancer simultané soient égales ?

**2.** De combien de façons peut-on truquer 2 dés de telle manière que les probabilités d'occurrence de chacune des sommes possibles obtenues lors d'un lancer simultané soient les mêmes que si les 2 dés étaient équilibrés ?

**Exercice 15. (Loi d'Hardy-Weinberg)** Dans un modèle simplifié de transmission héréditaire, un gène se présente sous deux formes $A$ et $a$, ce qui donne trois génotypes possibles : $AA$, $Aa$ et $aa$. Chaque individu reçoit de ses parents un gène tiré au hasard dans la paire de chacun des deux parents. On suppose que les génotypes des parents sont indépendants et on note leurs probabilités respectives sont $p$, $q$ et $r$.

**1.** Déterminer les probabilités $P$, $Q$ et $R$ qu'un enfant ait respectivement les génotypes $AA$, $Aa$ et $aa$.

**2.** En conclure que, à partir de la deuxième génération, ces probabilités sont constantes et vérifient $Q^2 = 4PR$.

**Exercice 16. (Le solitaire)** Un homme possède 5 pièces de monnaie. Deux d'entre elles ont deux faces, une d'entre elles possède deux piles et deux d'entre elles sont normales. Il ferme les yeux, tire une pièce au hasard, et la lance.

**1.** Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur face ?

**2.** Il ouvre les yeux et constate que la pièce est sur face. Quelle est la probabilité que l'autre côté soit encore face ?

**3.** Il ferme encore les yeux et relance cette même pièce. Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur face ?

**4.** Il ouvre les yeux et constate que la pièce est sur face. Quelle est la probabilité que l'autre côté soit face ?

**5.** Il élimine cette pièce et en choisit une autre qu'il lance. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur face ?

**Exercice 17. (M. Bayes dans le parc des Corneilles, )** $2/3$ des visiteurs du parc des Corneilles sont des touristes. Quand vous posez une question à un touriste, sa réponse est juste avec probabilité $3/4$. Les autochtones mentent toujours. Thomas ne sait si la sortie se trouve vers l'Est ou vers l'Ouest. Il pense que la probabilité que la sortie du parc soit vers l'Est vaut $\varepsilon$. Il rencontre un passant et lui pose successivement la même question (les touristes répondent indépendemment à chacune des questions qu'on leur pose) : *La sortie se trouve-t-elle vers l'Est ?*. Montrer que…

**1.** … quelle que soit la première réponse qu'on lui fasse, il continue à penser que la sortie est vers l'Est avec probabilité $\varepsilon$.

**2.** … si les deux premières réponses qu'il reçoit sont identiques, il continue à penser que la sortie est vers l'Est avec probabilité $\varepsilon$.

**3.** … après 3 réponses identiques, quelles sont les probabilités, en fonction de ces réponses, que Tom pense que la sortie est vers l'Est ? Évaluer cette quantité lorsque $\varepsilon = \frac{9}{20}$.

**Exercice 18. (Simuler la loi uniforme, )** On considère une pièce de monnaie biaisée qui, quand on la lance, renvoie face avec probabilité $p \in ]0,1[$. Montrer comment simuler une pièce équilibrée à l'aide de cette pièce.