



Dans ce problème, on montre que pour tout entier naturel n non nul et pour tous réels strictement positifs x_1, \dots, x_n ,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

$g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$ est la moyenne géométrique et cette inégalité est l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie I : Une première preuve

1. a) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n et pour tout $(x_1, \dots, x_{2^n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^n}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{2^n} x_i \right)^{1/2^n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{2^n} x_i}{2^n}.$$

2. Soient n un entier naturel non nul et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On note $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ la moyenne arithmétique des nombres x_1, \dots, x_n .

a) Montrer que $2^n \geq n$.

b) On pose $x_{n+1} = \dots = x_{2^n} = m$. En utilisant les questions précédentes, montrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie II : Une deuxième preuve

3. Montrer que pour tout x réel, $x \leq e^{x-1}$.

4. Soient n un entier naturel non nul et x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs. En notant $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ et en considérant les réels $\frac{x_1}{m}, \dots, \frac{x_n}{m}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique.

5. Déterminer les cas d'égalité

Partie III : Une dernière inégalité

Soit h le réel strictement positif tel que

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}.$$

Le réel h est la moyenne harmonique des nombres x_1, \dots, x_n .

6. Comparer g et h et déterminer les cas d'égalité.

7. En supposant que vos notes soient toujours strictement positives, quelle est la moyenne que vous préférez voir apparaître sur votre bulletin semestriel ?