Devoir à la Maison

Calculs de sommes doubles

à rendre le 28 septembre 2015

■ ■ ■

Définition (Sommes doubles). Soient I, J deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ et $(z_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes indexée par I et J. La somme des nombres complexes $z_{i,j}$ pour i parcourant l'ensemble I et j parcourant l'ensemble J, est notée

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} z_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} z_{i,j}.$$

Exemples. Soient m, $n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. On suppose que $I = [\![1, n]\!]$ et $J = [\![1, m]\!]$.

∗ On note alors

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} z_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} z_{i,j}.$$

En écrivant les $(z_{i,j})_{i\in I,\, j\in J}$ dans un tableau,

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,m}\\ z_{2,1} & z_{2,2} & \cdots & z_{2,m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_{n,1} & z_{n,2} & \cdots & z_{n,m}, \end{pmatrix}$$

la première somme correspond à la somme des termes du tableau. Dans la deuxième somme, on somme dans un premiers temps chacune des colonnes pour ensuite sommer chacun des résultats obtenus. Dans la troisième somme, on somme dans un premier temps chacune des linges pour ensuite sommer chaun des résultats obtenus.

∗ Parfois, dans des sommes doubles, les bornes de la seconde somme dépendent du paramètre de sommation de la permière. Par exemple,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} z_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} z_{i,j}.$$

En écrivant les $(z_{i,j})_{i\in I,\, j\in J}$ dans un tableau, on somme dans les trois expressions les complexes

$$\begin{pmatrix} \times & z_{12} & \cdots & z_{1n}\\ & \times & \cdots & z_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \times \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Caluler les sommes suivantes. On donnera le résultat sous forme factorisée.

1. $S_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$.

2. $S_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\cdot j$.

3. $S_3 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\cdot j$.

4. $S_4 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.

5. $S_5 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min\{i,j\}$.

6. $S_6 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \min\{i,j\}$.

Pour tous entiers i, j, on note $\delta_{i,j}$ l'entier qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon (ce symbole est appelé symbole de Kronecker). Calculer

7. $S_7 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i\cdot j\cdot\delta_{i,j}$.

8. La série harmonique, notée $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Exprimer la quantité $\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j}$ en fonction de H_n.

b) Déterminer une forme simple de l'expression $\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$.

9. On reprend les notations de la question précédente.

a) Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

b) Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$.

10. Une formule de réciprocité. Soit u une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$ et $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} = 0$.

b) En déduire que $w = u$.