



Soient  $p, q$  deux nombres complexes. On s'intéresse dans un premier temps aux solutions de l'équation

$$x^3 + px + q = 0. \quad (1)$$

On notera  $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$  et  $\delta$  une racine carrée de  $\Delta$ .

**1.** Soit  $x_0$  une solution de l'équation (1). On considère deux nombres complexes  $u, v$  tels que  $x_0 = u + v$ .

**a)** Calculer  $u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q$ .

**b)** En choisissant les nombres complexes  $u, v$  tels que  $3uv + p = 0$ , montrer que  $u^3$  et  $v^3$  sont solution d'une équation du second degré à préciser.

**c)** En posant  $\rho_1$ , resp.  $\rho_2$ , une racine cubique de  $\frac{-q+\delta}{2}$ , resp.  $\frac{-q-\delta}{2}$ , déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation (1).

**2.** Si  $p$  et  $q$  sont réels, discuter, en fonction de  $\Delta$ , le nombre de racines réelles de l'équation (1).

**3.** En déduire les solutions complexes des équations

**a)**  $z^3 = 36z + 91$ .

**b)**  $z^3 + 3z + 2 = 0$ .

**c)**  $z^3 - 3z + 2 = 0$ .

Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres complexes. On suppose que  $a \neq 0$  et on s'intéresse à l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (2)$$

**4.** En posant  $x = \lambda + X$  dans l'équation (2), et en choisissant  $\lambda$  de manière judicieuse, montrer qu'il existe deux nombres complexes  $p, q$  tels que  $X^3 + pX + q = 0$  (On précisera les valeurs de  $p$  et  $q$  en fonction de  $a, b, c, d$ ).

**5.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $z^3 + 3z^2 - 3z + 4 = 0$ .