Devoir à la Maison

Construction de $\mathbb{R}$

Facultatif

■ ■ ■

Le but de ce problème est de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ en utilisant la méthode des coupures.

Une coupure α est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes

- (i). α est non vide et différent de $\mathbb{Q}$.
- (ii). Si $r \in \alpha$ et si $s < r$, alors $s \in \alpha$.
- (iii). Si $r \in \alpha$, il existe $s \in \alpha$ tel que $r < s$.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des coupures. Dans toute la suite, les lettres grecques désignent des coupures alors que les lettres latines désignent des rationnels. Pour tout rationnel r, on notera $r^\star = \{p \in \mathbb{Q}\ ;\ p < r\}$.

1. Deux résultats simples.

a) Montrer que si $r \in \alpha$ et $s \notin \alpha$, alors $r < s$.

b) Montrer que si $r \notin \alpha$ et si $r < s$, alors $s \notin \alpha$.

c) Montrer que pour tout rationnel r, l'ensemble $r^\star$ est un coupure.

2. $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné.

Soient α, β deux coupures. On note $\alpha \leqslant \beta$ si et seulement si $\alpha \subset \beta$.

a) Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que cet ordre est un ordre total.

3. $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Soit $\gamma = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \alpha$.

a) Montrer que γ est une coupure.

b) Montrer que γ est un majorant de A.

c) Conclure en montrant que γ est le plus petit des majorants de A.

d) En déduire le théorème de la borne inférieure.

4. Définition de l'addition.

Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. On note $\alpha + \beta = \{r + s,\ (r, s) \in \alpha \times \beta\}$.

a) Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha + \beta$ est une coupure.

b) Montrer que la loi $+$ est commutative et associative.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\alpha + 0^\star = \alpha$.

d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit $\beta = \{r \in \mathbb{Q} | \exists\ s > 0\ ;\ -r - s \notin \alpha\}$. Montrer que $\beta \in \mathbb{R}$ puis que $\alpha + \beta = 0^\star$.

On notera par la suite $\beta = -\alpha$.

e) En déduire que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

5. Compatibilité avec la relation d'ordre.

Si $\alpha \leqslant \beta$ et $\alpha \neq \beta$, on note $\alpha < \beta$.

a) Montrer que si α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que $\beta < \gamma$, alors $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

b) Montrer que si $\alpha > 0^\star$ si et seulement si $-\alpha < 0^\star$.

6. Définition de la multiplication.

a) Soient $\alpha > 0^\star$ et $\beta > 0^\star$. On note $\alpha_+ = \alpha \cap \mathbb{Q}_+$, $\beta_+ = \beta \cap \mathbb{Q}_+$ et $\alpha\beta = \{p \in \mathbb{Q} | \exists\ (r, s) \in \alpha_+ \times \beta_+\ ;\ p \leqslant rs\}$.

Montrer que cette opération définit une loi interne, commutative, associative, d'élément neutre $1^\star$ et distributive par rapport à l'addition.

b) Proposer une définition de la multiplication lorsque α et β ne sont plus nécessairement strictement positifs.
On a ainsi montré que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné possédant la propriété de la borne supérieure.

7. $\mathbb{R}$ **et** $\mathbb{Q}$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{Q}$,

(i). $(r+s)^\star = r^\star + s^\star$.

(ii). $(rs)^\star = r^\star s^\star$.

(iii). $r^\star < s^\star$ si et seulement si $r < s$.

On a ainsi défini un sous-corps de $\mathbb{R}$ isomorphe à $\mathbb{Q}$.

8. Comment définiriez-vous $\sqrt{2}$?

Cette construction de $\mathbb{R}$, appelée méthode des coupures, a été introduite par R. Dedekind en 1872. Ce sujet suit la présentation de W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis.