Devoir à la Maison

Constante d'Euler

à rendre le lundi 23 novembre 2015

■ ■ ■

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on définit $u_n = H_n - \ln n$. On rappelle que la suite u converge vers un réel γ appelé constante d'Euler. On s'intéresse dans ce problème à la rapidité de convergence de u vers γ.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.

a) Montrer que $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln \frac{k+1}{k} \leqslant \frac{1}{k}$.

b) Étudier pour tout réel x de l'intervalle $[k, k+1]$ le signe de la fonction f_k définie par $f_k(x) = \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \cdot (x-k) - \frac{1}{x}$.

c) En déduire l'encadrement

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln \frac{k+1}{k} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right).$$

2. Montrer que $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$.

3. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on définit les quantités

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2}, \\ g_2(x) &= g_1(x) + \frac{2}{3x^3}. \end{aligned}$$

a) Étudier les variations de g_1 et g_2 puis en déduire leur signe.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

4. Remarquons que pour tout entier naturel non nul k et pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^2} &\leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}, \\ \frac{1}{(k+1)^3} &\leqslant \frac{1}{x^3} \leqslant \frac{1}{k^3}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

a) Montrer que les suites S et T sont convergentes vers deux réels α et β.

b) Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que $\alpha - S_{n-1} \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$ et $\beta - T_{n-1} \leqslant \frac{1}{2(n-1)^2}$.

5. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$

6. Donner une valeur de l'entier n qui permette, à partir de la suite u, de déterminer γ à 10^{-2} près. En déduire, à l'aide d'un outil de calcul, un encadrement de γ à 10^{-2} près.