■ ■ ■

Soit x un nombre réel strictement positif. On construit successivement, si possible, les nombres $x_0, \dots, x_n, \dots$ de la manière suivante :

$$x_0 = x \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \text{si } x_n \text{ est défini et si } x_n \neq \lfloor x_n \rfloor,\ \text{alors } x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}.$$

On rappelle que, d'après le théorème de la division euclidienne, pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0, b-1]\!]$ tel que $a = bq + r$.

1. Montrer que si $x_1, \dots, x_n$ sont définis, alors

$$x = \lfloor x_0 \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor x_1 \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor x_2 \rfloor + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{\lfloor x_{n-1} \rfloor + \frac{1}{x_n}}}}}.$$

2. On suppose dans cette question qu'il existe $(r_0, r_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ tels que $x = \frac{r_0}{r_1}$.

a) Soit r_2 le reste de la division euclidienne de r_0 par r_1. Montrer que x_1 est défini si et seulement si r_2 est non nul. Dans ce cas, montrer que $x_1 = \frac{r_1}{r_2}$.

b) On reprend les notations précédentes et on suppose que r_2 est non nul. On note r_3 le reste de la division euclidienne de r_1 par r_2. Montrer que x_2 est défini si et seulement si r_3 est non nul. Dans ce cas, donner une expression de x_2.

c) On suppose que k est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et que l'on a construit successivement $r_1, \dots, r_k$ et $x_1, \dots, x_{k-1}$ tels que pour tout $i \in [\![2, k]\!]$, r_i est le reste de la division euclidienne de r_{i-2} par r_{i-1} et $x_{i-1} = \frac{r_{i-1}}{r_i}$. On note r_{k+1} le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k. Montrer que x_k est défini si et seulement si r_{k+1} est non nul. Dans ce cas, donner une expression de x_k.

d) Comparer, lorsqu'ils existent, les entiers $r_1, \dots, r_{k+1}$ définis précédemment.

e) Est-ce que x_n peut être défini pour tout n ?

3. Établir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie si et seulement si x est un irrationnel.

Partie I : Étude de la convergence

On suppose dans tout ce qui suit que x est un nombre irrationnel strictement positif. On considère les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

- $p_0 = 1$, $p_1 = \lfloor x \rfloor$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $p_{n+1} = p_n \lfloor x_n \rfloor + p_{n-1}$,
- $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $q_{n+1} = q_n \lfloor x_n \rfloor + q_{n-1}$.

La fraction $\frac{p_n}{q_n}$ est appelée la n-ème réduite de x.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_n > 1$.

5. Étudier le sens de variation des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer leurs limites. (On montrera dans un premier temps que ces suites sont croissantes à partir du rang 1, puis qu'elles sont strictement croissantes à partir d'un rang que l'on déterminera).

6. Soit n un entier naturel. Calculer $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}$.

7. Soit n un entier naturel. Montrer que $x = \frac{p_{n+1}x_{n+1} + p_n}{q_{n+1}x_{n+1} + q_n}$.

8 . a) Soit n un entier naturel non nul. Comparer, suivant la parité de n, les nombres x, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ et $\frac{p_n}{q_n}$.

b) Montrer que $\left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leqslant \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|$.

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \frac{1}{q_n^2}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

10. Soit n un entier naturel pair supérieur ou égal à 2. On suppose que p et q sont deux entiers naturels tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|$.

a) Montrer que $\frac{p}{q}$ est entre $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_n}{q_n}$.

b) On pose $A = qp_{n-1} - pq_{n-1}$ et $B = qp_n - pq_n$. Exprimer p et q en fonction de A et B et en déduire que $p \geqslant p_n$ et $q > q_n$.

On dit que $\frac{p_n}{q_n}$ est une meilleure approximation de x : il n'y a pas de rationnel de dénominateur inférieur ou égal à q_n qui approche x mieux que $\frac{p_n}{q_n}$.