■ ■ ■

Partie I : Formule de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. La formule de Wallis.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$.

b) En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie II : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{n!}{\sqrt{n}}$.

5. Convergence de suite.

a) Étudier la monotonie de la fonction $\varphi : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [1,+\infty[$ par $\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente. Nous noterons ℓ sa limite.

6. Pour tout entier naturel k, on note h_k la fonction affine vérifiant

$$h_k(k) = \ln k, \; h_k(k+1) = \ln(k+1).$$

a) Montrer que pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$0 \leqslant \ln(t) - h_k(t) \leqslant (t-k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n,

$$0 \leqslant \int_1^n \ln x \, dx - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k+1)+\ln k}{2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n,

$$\ln\left[\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] - \ln n! + \ln\sqrt{n} \leqslant -\frac{1}{2}$$

7. Détermination de ℓ.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$, $\sqrt{e} \leqslant u_n$.

b) En déduire que ℓ est non nul et que $n! \sim \ell \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

c) En utilisant la formule de Wallis, identifier ℓ. En déduire la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$