Stanislas | **Devoir à la Maison** | **MPSI 1**
D.M. 14 | Développement asymptotique d'une fonction définie implicitement | 2h

à rendre le 25 janvier 2016

■ ■ ■

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

(i). f' est monotone et ne s'annule pas,

(ii). $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ et $f(x) = o_{+\infty}(x)$,

(iii). $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $f'(x + bf(x)) \sim_{+\infty} f'(x)$.

Dans toute la suite, les relations de comparaison sont exprimées lorsque x tend vers l'infini.

1. Soit $h : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)$.

a) Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 \geqslant a$ et h réalise une bijection de $[x_0, +\infty[$ dans $[y_0, +\infty[$.

b) En déduire qu'il existe $g : [y_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [y_0, +\infty[$,

$$g(x) - f(g(x)) = x.$$

c) Montrer que, pour tout $x \in [y_0, +\infty[$, il existe $z \in]g(x), x[$ (ou $]x, g(x)[$) tel que

$$f(g(x)) - f(x) = (g(x) - x)f'(z).$$

d) Montrer que $x \mapsto g(x) - x$ ne s'annule pas sur un voisinage de l'infini.

e) En déduire que $g(x) - x \sim f(x)$.

On définit la suite de fonctions (g_n) par

$$g_0(x) = x \text{ et pourtout } n \geqslant 1,\ g_n(x) = x + f(g_{n-1}(x)).$$

2 . a) Montrer qu'il existe $y_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto g(x) - g_n(x)$ ne s'annule pas sur $[y_1, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

b) Montrer que $g(x) - g_n(x) = o(g(x) - g_{n-1}(x))$.

c) En déduire que $g_n(x) - x \sim f(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, +\infty[$, à l'aide du théorème des accroissements finis, on note

$$g(x) - g_n(x) = (g(x) - g_{n-1}(x)) \cdot f'(t_{n-1}(x)).$$

Pour alléger les notations, on oubliera la dépendance de t_{n-1} en x.

3 . a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_{n-1} - x \sim f(x)$.

b) En déduire que $f'(t_{n-1}) \sim f'(x)$.

c) Conclure en montrant que $g(x) - g_n(x) \sim f(x)f'(x)^n$.

4. Donner une méthode permettant d'obtenir un développement asymptotique de $g(x)$.

5. Application.

a) Soit $\alpha \in] - \infty, 1[\setminus\{0\}$. Vérifier que $f : x \mapsto x^\alpha$ satisfait les conditions énoncées.

b) Donner un développement asymptotique de y en fonction de x à 3 termes lorsque $y^5 + y = x$.