Devoir à la Maison

Polynômes d'interpolation de Lagrange

■ ■ ■

Pour tous i, $j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_0, \ldots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$ tels que $a_0 < \cdots < a_n$.

1. Une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.

b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit π l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\pi(P) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$.

a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de π.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$.

a) Montrer que ε est un isomorphisme.

b) Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(a_i) = f(a_i)$.

Ce polynôme s'appelle le *polynôme d'interpolation de Lagrange* associé à la fonction f aux points $(a_0, \ldots, a_n)$. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([-1, 1])$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |f|$.

4. Soient $f \in \mathscr{C}^{n+1}([-1, 1], \mathbb{R})$ et P_f le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f. Montrer que

$$\forall\, x \in [-1, 1],\ \exists\, \xi \in]-1, 1[\ ;\ f(x) - P_f(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{n} (x - a_i)}{(n+1)!}.$$

On pourra considérer la fonction $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - P_f(t) - K \prod_{i=0}^{n} (t - a_i)$.

5. Soit T_{n+1} le polynôme de Tchebychev d'ordre $n + 1$, i.e. tel que $\forall\, x \in [-1, 1]$, $T_{n+1}(x) = \cos((n + 1) \arccos x)$.

a) Montrer que T_{n+1} est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.

b) On note $t_{n+1} = 2^{-n} T_{n+1}$. Montrer que t_{n+1} est un polynôme unitaire.

c) Montrer que, pour tout polynôme Q unitaire de degré $n + 1$, $\|Q\|_\infty \geqslant 2^{-n}$ avec égalité si et seulement si $Q = t_{n+1}$.

6. Quel est l'intérêt des racines des polynômes de Tchebychev dans l'interpolation de Lagrange ?